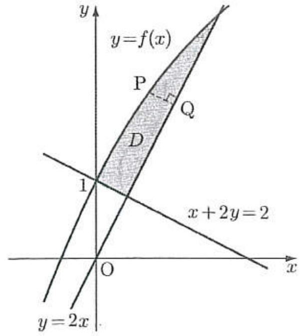
0001929720708999

獨協医科大学

2014年 医学部 第5問　1枚目／2枚

5　関数 $f(x)=2x+\cos x$ がある．xy 平面上の曲線 $y=f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{2}$ の部分を C とし，C と直線 $y=2x$，および直線 $x+2y=2$ で囲まれた領域を D とする．領域 D を直線 $y=2x$ の周りに1回転してできる立体の体積を求めよう．



C 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ から直線 $y=2x$ に下ろした垂線と直線 $y=2x$ との交点を Q とする．

線分 PQ の長さは

$$\frac{|\cos t|}{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}\ 5$$

であり，点 Q の x 座標は

$$t+\frac{\boxed{\text{イ}}\ 2}{\boxed{\text{ウ}}\ 5}\cos t$$

である．これから，$\mathrm{OQ}=s$ とおくと

$$s=\sqrt{\boxed{\text{エ}}}\left(t+\frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}\cos t\right)$$

5

である．

$f'(x)=2-\sin x>0$ なので $f(x)$ は増加する．よって，求める体積 V は

$$V=\int_{\frac{2\sqrt{5}}{5}}^{\frac{\sqrt{5}\pi}{2}} \pi \mathrm{PQ}^2\,ds$$

$$=\frac{\sqrt{\boxed{\text{オ}}}\ 5\ \pi}{\boxed{\text{カ}}\ 5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 t-\frac{\boxed{\text{キ}}\ 2}{\boxed{\text{ク}}\ 5}\cos^2 t\sin t\right)dt$$

$$=\frac{5\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}\ \pi^2}{\boxed{\text{コサ}}}-\frac{\boxed{\text{シ}}\ 2\ \sqrt{\boxed{\text{ス}}}\ 5\ \pi}{\boxed{\text{セソ}}}$$

である．　20　　75

$\mathrm{P}(t,\ 2t+\cos t)$ と $y=2x$ のキョリは．

点と直線のキョリ公式より．

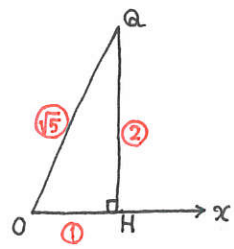
$$\mathrm{PQ}=\frac{|2t-(2t+\cos t)|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|\cos t|}{\sqrt{5}}\ /\!/$$

直線 PQ ⊥ $y=2x$ より．PQ の傾きは $-\frac{1}{2}$

$\therefore$ PQ : $y=-\frac{1}{2}(x-t)+2t+\cos t$

$\therefore$ $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}t+\cos t$

これと $y=2x$ から y を消去して．$\underline{x=t+\frac{2}{5}\cos t}\ /\!/$



OQ : $y=2x$ より．

右の図のようになる．

$\therefore$ $s=\sqrt{5}\,\mathrm{OH}$

$=\underline{\sqrt{5}\left(t+\frac{2}{5}\cos t\right)}\ /\!/$

$V=\int_{\frac{2\sqrt{5}}{5}}^{\frac{\sqrt{5}\pi}{2}} \pi PQ^2\,ds$ において,

$s=\sqrt{5}\left(t+\frac{2}{5}\cos t\right)$ より. $ds=\sqrt{5}\left(1-\frac{2}{5}\sin t\right)dt$,

s	$\frac{2\sqrt{5}}{5} \to \frac{\sqrt{5}\pi}{2}$
t	$0 \to \frac{\pi}{2}$

であるから,

$$V=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \pi\cdot\left(\frac{|\cos t|}{\sqrt{5}}\right)^2\cdot\sqrt{5}\left(1-\frac{2}{5}\sin t\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\pi}{\sqrt{5}}\cos^2 t\left(1-\frac{2}{5}\sin t\right)dt \quad \underline{=\frac{\sqrt{5}\pi}{5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos^2 t-\frac{2}{5}\cos^2 t\sin t\right)dt}\ /\!/$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{5}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt-\frac{2\pi}{5\sqrt{5}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin t\,dt$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{5}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt-\frac{2\pi}{5\sqrt{5}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin t\,dt$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{5}}\left[\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{2\pi}{5\sqrt{5}}\left[-\frac{1}{3}\cos^3 t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{5}}\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{2\pi}{5\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{3}$$

$$=\underline{\frac{\sqrt{5}\pi^2}{20}-\frac{2\sqrt{5}\pi}{75}}\ /\!/$$

$\boxed{\text{自主課題}}$

Vを求めた積分の区間が $\frac{2\sqrt{5}}{5}\leqq s\leqq\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$ で与えられているが

なぜ、このようになっているか考えてみよう.

(誘導問題なので気にしなくても解けるが、自力でVを求められるだろうか)

この問題の流れは、座標軸以外の直線を回転軸にもつ回転体の体積

を求める問題において定番の流れである.

決して易しくないが、習得していれば一歩差をつけることができる