0001908631908999

同志社大学

2014年 理工学部 第1問

1枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{1}$ 次の $\boxed{}$ に適する数または式を記入せよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 4a_n + 1$ で与えられているとき，$a_2 =$ $\boxed{ア}$ であり，その一般項は $a_n =$ $\boxed{イ}$ となる．また，$a_{n+2} - a_n$ を5で割った余りは $\boxed{ウ}$ である．ここで，a_n を5で割った余りを b_n とする．このとき，$b_4 =$ $\boxed{エ}$，$b_5 =$ $\boxed{オ}$ であり，$\sum_{k=1}^{2n} a_k b_k =$ $\boxed{カ}$ である．

(2) 座標平面において1次変換 f による点A(2, 0)の像は点C(4, 0)であり，点B(0, 4)の像も点C(4, 0)であるとする．このとき，f による点D(3, 2)の像は点($\boxed{キ}$, $\boxed{ク}$)である．次に，放物線上を動く点 $P\left(t,\ -\frac{1}{2}t^2+1\right)$ $(0 \leqq t \leqq 4)$ の f による像を点Qとする．点Qの x 座標の最大値は $\boxed{ケ}$ であり，そのときの点Pの x 座標は $\boxed{コ}$ である．

ア: 5　イ: $\frac{1}{3}(4^n-1)$　ウ: 0　エ: 0　オ: 1　カ: $\frac{4^{2n+1}-15n-4}{45}$　キ: 8　ク: 0　ケ: 3　コ: 2

(1) $\underline{a_2 = 4a_1 + 1 = 5}$ //

$a_{n+1} + \frac{1}{3} = 4\left(a_n + \frac{1}{3}\right)$ ∴ $\{a_n + \frac{1}{3}\}$ は 初項 $a_1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$，公比4の等比数列

∴ $a_n + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\cdot 4^{n-1}$ ∴ $\underline{a_n = \frac{1}{3}(4^n - 1)}$ //

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_n &= \frac{1}{3}(4^{n+2} - 1 - 4^n + 1) \\ &= \frac{1}{3}\cdot 4^n(16-1) \\ &= 5\cdot 4^n \end{aligned}$$

∴ $a_{n+2} - a_n$ を5で割った余りは $\underline{0}$ //

a_1, a_2 を5で割った余りは，それぞれ 1, 0 より．

$b_n = \begin{cases} 1 & (n:\text{奇数}) \\ 0 & (n:\text{偶数}) \end{cases}$ ∴ $\underline{b_4 = 0,\ b_5 = 1}$ //

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{k=1}^{2n} a_k b_k &= a_1 + a_3 + a_5 + \cdots + a_{2n-1} \\ &= \frac{1}{3}(4^1-1) + \frac{1}{3}(4^3-1) + \frac{1}{3}(4^5-1) + \cdots + \frac{1}{3}(4^{2n-1}-1) \\ &= \frac{1}{3}(4 + 4^3 + 4^5 + \cdots + 4^{2n-1}) - \frac{1}{3}\cdot n \\ &= \frac{1}{3}\cdot\frac{4(1-4^{2n})}{1-4^2} - \frac{1}{3}n \\ &= \underline{\frac{4^{2n+1} - 15n - 4}{45}} \end{aligned}$$ //

0001908631908999

同志社大学

2014 年 理工学部 第 1 問　　2 枚目／2 枚

数理 石井K

1　次の $\boxed{}$ に適する数または式を記入せよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 4a_n + 1$ で与えられているとき，$a_2 = \boxed{ア}$ であり，その一般項は $a_n = \boxed{イ}$ となる．また，$a_{n+2} - a_n$ を 5 で割った余りは $\boxed{ウ}$ である．ここで，a_n を 5 で割った余りを b_n とする．このとき，$b_4 = \boxed{エ}$，$b_5 = \boxed{オ}$ であり，$\sum_{k=1}^{2n} a_k b_k = \boxed{カ}$ である．

(2) 座標平面において 1 次変換 f による点 A(2, 0) の像は点 C(4, 0) であり，点 B(0, 4) の像も点 C(4, 0) であるとする．このとき，f による点 D(3, 2) の像は点 ($\boxed{キ}$, $\boxed{ク}$) である．次に，放物線上を動く点 $\mathrm{P}\left(t,\ -\frac{1}{2}t^2+1\right)$ $(0 \leqq t \leqq 4)$ の f による像を点 Q とする．点 Q の x 座標の最大値は $\boxed{ケ}$ であり，そのときの点 P の x 座標は $\boxed{コ}$ である．

(2) f を表す行列を $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと，

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\therefore 2a = 4$，$2c = 0$　$\therefore a = 2$，$c = 0$

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\therefore 4b = 4$，$4d = 0$　$\therefore b = 1$，$d = 0$

$\therefore A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ となるので，$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\therefore \underline{(8, 0)}$ //

$Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ -\frac{1}{2}t^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}t^2+2t+1 \\ 0 \end{pmatrix}$　$\therefore f(t) = -\frac{1}{2}t^2+2t+1$ とおくと

$f(t) = -\frac{1}{2}(t^2-4t)+1$
$\quad = -\frac{1}{2}(t-2)^2+3$　$\therefore$ 点 Q の x 座標の最大値は $\underline{3}$ //

このとき，$t = 2$ より，P の x 座標は，$\underline{2}$ //