愛媛大学

2014 年 医学部 第 5 問　　1枚目 / 3枚　　☆難しい（(5)の(i)は易）　数理 石井K

5　n は自然数，p_0，p_1，…，p_n は $p_0>0$，…，$p_n>0$ かつ $p_0+p_1+\cdots+p_n=1$ を満たす定数とする．ポイント 0，1，2，…，$n-1$，n が，それぞれ p_0，p_1，p_2，…，p_{n-1}，p_n の確率で得られる試行 T を考える．試行 T を 1 回行って得られるポイントの期待値を a とし，$A=[a]+1$ とする．ただし，実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．競技者は，試行 T を下記の各設問のルールに従って何回か行う．

(1) k を $1\leqq k\leqq n$ を満たす整数とする．競技者は，試行 T を以下のルールに従って最大 2 回まで行う．

① 試行 T を 1 回行い，もしポイントが k 以上であれば 2 回目の試行を行わず，このポイントを賞金とする．

② 1 回目のポイントが k 未満であれば 2 回目の試行 T を行う．このとき，1 回目のポイントは無効とし，2 回目のポイントを賞金とする．

このとき賞金の期待値を b_k とする．b_k を求めよ．

(2) (1) の期待値 b_k は k が A のとき最大となることを示せ．

(3) m を $1\leqq m\leqq n$ を満たす整数とする．競技者は，試行 T を以下のルールに従って最大 3 回まで行う．

① 試行 T を 1 回行い，もしポイントが m 以上であれば 2 回目以降の試行を行わず，このポイントを賞金とする．

② 1 回目のポイントが m 未満であれば 2 回目の試行 T を行う．2 回目のポイントが A 以上であれば 3 回目の試行を行わない．このとき，1 回目のポイントは無効とし，2 回目のポイントを賞金とする．

③ 2 回目のポイントが A 未満であれば 3 回目の試行 T を行う．このとき，1 回目，2 回目のポイントは無効とし，3 回目のポイントを賞金とする．

このとき賞金の期待値を c_m とする．c_m を求めよ．

(4) (3) の期待値 c_m は m が $B=[b_A]+1$ のとき最大となり，$c_B\geqq b_A$ であることを示せ．ただし，b_A は (1) で求めた期待値 b_k の $k=A$ のときの値である．

(5) $n=5$ とし，試行 T として，5 枚の硬貨を同時に投げ，表の出た枚数をポイントとする試行を考える．また，b_k，c_m は上記で定義したものとする．

(i) p_0，p_1，p_2，p_3，p_4，p_5，a を求めよ．

(ii) (1) のように最大 2 回試行を行う場合，b_k の最大値を求めよ．

(iii) (3) のように最大 3 回試行を行う場合，c_m の最大値を求めよ．

(1) 1回目のポイントが k 未満となる確率は．$p_0+p_1+\cdots+p_{k-1}$ であるから

$$b_k=a(p_0+p_1+\cdots+p_{k-1})+\{kp_k+(k+1)p_{k+1}+\cdots+np_n\}$$

$$=a\sum_{i=0}^{k-1}p_i+\sum_{i=k}^{n}ip_i \quad //$$

期待値の中で別の期待値 a を使ったが，気持ちが悪ければ（厳密には）ポイントが i 点になる確率を出した方がいいかもしれない

2枚目につづく

数理 石井K

(2) (1)より．$1 \leqq k \leqq n-1$ のとき．

$$b_{k+1} - b_k = a\sum_{i=0}^{k} p_i + \sum_{i=k+1}^{n} i p_i - a\sum_{i=0}^{k-1} p_i - \sum_{i=k}^{n} i p_i$$

$$= a p_k - k p_k$$

$$= (a-k) p_k$$

$\therefore$ $p_k > 0$ であるから．$\begin{cases} k < a \text{ のとき．} & b_k < b_{k+1} \\ k = a \text{ のとき．} & b_k = b_{k+1} \\ k > a \text{ のとき．} & b_k > b_{k+1} \end{cases}$

$\therefore$ a が整数のとき．$b_1 < b_2 < \cdots < b_a = b_{a+1} > b_{a+2} > \cdots > b_n$

a が整数でないとき．$b_1 < b_2 < \cdots < b_{[a]} < b_{[a]+1} > b_{[a]+2} > \cdots > b_n$

どちらの場合も $k = A\,(=[a]+1)$ のとき．b_k が最大となっている ▨

(3) $$C_m = \underbrace{\{m p_m + (m+1)p_{m+1} + \cdots + n p_n\}}_{\text{1回目で賞金が決まる部分}} + \underbrace{(p_0 + p_1 + \cdots + p_{m-1}) \cdot \{A p_A + (A+1)p_{A+1} + \cdots + n p_n\}}_{\text{2回目で決まる部分}}$$

$$+ \underbrace{(p_0 + p_1 + \cdots + p_{m-1})(p_0 + p_1 + \cdots + p_{A-1}) \cdot a}_{\text{3回目で決まる部分}}$$

$$= \sum_{i=m}^{n} i p_i + \left(\sum_{i=0}^{m-1} p_i\right) \cdot \left(\sum_{i=A}^{n} i p_i\right) + a \cdot \left(\sum_{i=0}^{m-1} p_i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{A-1} p_i\right) \quad //$$

(4) (3)より．$$C_m = \left(\sum_{i=0}^{m-1} p_i\right) \underbrace{\left\{\sum_{i=A}^{n} i p_i + a\sum_{i=0}^{A-1} p_i\right\}}_{= b_A\ (m\text{によらない})} + \sum_{i=m}^{n} i p_i$$

$$\therefore\ C_{m+1} - C_m = p_m \cdot b_A - m p_m \qquad (1 \leqq m \leqq n-1)$$

$$= p_m (b_A - m)$$

$\therefore$ $p_m > 0$ であるから．$\begin{cases} m < b_A \text{ のとき．} & C_m < C_{m+1} \\ m = b_A \text{ のとき．} & C_m = C_{m+1} \\ m > b_A \text{ のとき．} & C_m > C_{m+1} \end{cases}$

$\therefore$ (2)と同様にして．$m = [b_A] + 1 = B$ のとき．C_m は最大になる ▨

3枚目につづく．

数理
石井K

(4) のつづき.

$$C_B - b_A = \left(\sum_{i=1}^{B-1} P_i\right)\cdot b_A + \left(\sum_{i=B}^{n} i P_i\right) - b_A$$

$$= \left(\sum_{i=B}^{n} i P_i\right) - b_A \sum_{i=B}^{n} P_i$$

$$= \sum_{i=B}^{n} P_i (i - b_A)$$

$$\geqq \sum_{i=B}^{n} P_i (B - b_A)$$

最小であるBにおきかえた

$$= \sum_{i=B}^{n} P_i ([b_A] + 1 - b_A)$$

$$\geqq 0 \qquad (\because b_A - 1 < [b_A] \leqq b_A)$$

$\therefore C_B \geqq b_A$ が示された ▨

(5) (i)

$$P_i = \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{5-i} \cdot {}_5C_i = \frac{{}_5C_i}{2^5}$$ より.

$P_0 = \frac{1}{32}$, $P_1 = \frac{5}{32}$, $P_2 = \frac{5}{16}$, $P_3 = \frac{5}{16}$, $P_4 = \frac{5}{32}$, $P_5 = \frac{1}{32}$ //

$$a = 0\cdot\frac{1}{32} + 1\cdot\frac{5}{32} + 2\cdot\frac{5}{16} + 3\cdot\frac{5}{16} + 4\cdot\frac{5}{32} + 5\cdot\frac{1}{32}$$

$$= \frac{5}{2}$$ //

(ii) $k = A = \left[\frac{5}{2}\right] + 1 = 3$ のとき. 最大となり.

$$b_3 = \frac{5}{2}(P_0 + P_1 + P_2) + 3\cdot P_3 + 4\cdot P_4 + 5\cdot P_5 = \frac{95}{32}$$ //

(iii) $m = [b_A] + 1 = 3$ のとき 最大となり.

$$C_3 = b_3(P_0 + P_1 + P_2) + 3P_3 + 4P_4 + 5P_5$$

$$= \frac{205}{64}$$ //