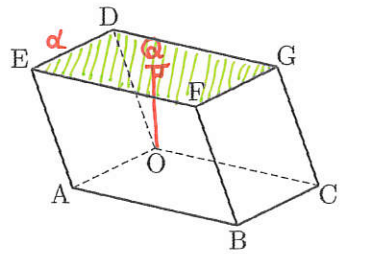
0002069270397999

愛媛大学

2015年 理学部・工学部 第2問　　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ tを実数とする．座標空間内に4点O(0, 0, 0)，A(3, 0, 0)，C(−1, 6, −2)，D(t, −2, 4)がある．図のような平行六面体OABC-DEFGにおいて，点Pが平行四辺形DEFGの周および内部を動くとき，△OCPの面積Sの最小値をmとする．また，平行四辺形DEFGを含む平面をαとし，点Oから平面αに下ろした垂線と平面αとの交点をQとする．



(1) 平行四辺形OABCを含む平面に垂直な単位ベクトル$\vec{u}$で，そのz成分が正となるものを求めよ．
(2) 線分OQの長さを求めよ．
(3) 点Qが平行四辺形DEFGの周または内部にあるとき，tのとり得る値の範囲を求めよ．
(4) tが(3)で求めた範囲にあるとき，mの値および$S=m$となる点Pの座標をすべて求めよ．

(1) $\vec{u} \perp$ 平面OAC より，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{OA} = \vec{u}\cdot\overrightarrow{OC} = 0$

ここで，$\vec{u} = (x, y, z)$ とおくと，

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{OA} = 3x = 0$，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{OC} = -x+6y-2z = 0$

$\therefore \begin{cases} x = 0 \text{ かつ} \\ -x+6y-2z = 0 \text{ かつ } \sqrt{x^2+y^2+z^2} = 1 \text{ かつ } z>0 \end{cases}$

$\Longleftrightarrow x = 0,\ y = \dfrac{\sqrt{10}}{10},\ z = \dfrac{3\sqrt{10}}{10}$　　$\therefore \underline{\vec{u} = \left(0, \dfrac{\sqrt{10}}{10}, \dfrac{3\sqrt{10}}{10}\right)}$ //

(2) 平行四辺形OABCとDEFGは平行なので，

$\overrightarrow{OQ} \parallel \vec{u}$　よって，$\overrightarrow{OQ} = k(0, 1, 3)$ と表せる

$\therefore \overrightarrow{DQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OD} = (-t, k+2, 3k-4)$

点Qはα上の点なので，$\overrightarrow{DQ} = l\overrightarrow{DE} + n\overrightarrow{DG}$ と表せる．

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OA} = (3, 0, 0)$，$\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{OC} = (-1, 6, -2)$ より

$\begin{cases} -t = 3l - n & \cdots ① \\ k+2 = 6n & \cdots ② \\ 3k-4 = -2n & \cdots ③ \end{cases}$

②＋③×3 より，$10k - 10 = 0$

$\therefore k = 1$　$\therefore \overrightarrow{OQ} = (0, 1, 3)$ より $\underline{|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{10}}$ //

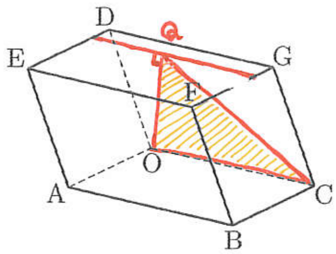
0002069270397999

愛媛大学

2015年 理学部・工学部 第2問　　2枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ tを実数とする．座標空間内に4点O(0, 0, 0)，A(3, 0, 0)，C(−1, 6, −2)，D(t, −2, 4)がある．図のような平行六面体OABC-DEFGにおいて，点Pが平行四辺形DEFGの周および内部を動くとき，△OCPの面積Sの最小値をmとする．また，平行四辺形DEFGを含む平面をαとし，点Oから平面αに下ろした垂線と平面αとの交点をQとする．



(1) 平行四辺形OABCを含む平面に垂直な単位ベクトル$\vec{u}$で，そのz成分が正となるものを求めよ．

(2) 線分OQの長さを求めよ．

(3) 点Qが平行四辺形DEFGの周または内部にあるとき，tのとり得る値の範囲を求めよ．

(4) tが(3)で求めた範囲にあるとき，mの値および$S=m$となる点Pの座標をすべて求めよ．

(3) (2)の①,②,③式より，$k=1$，$n=\frac{1}{2}$，$l=\frac{1}{6}-\frac{1}{3}t$

$\therefore\ \overrightarrow{DQ}=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}t\right)\overrightarrow{DE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DG}$

∴ 点Qが平行四辺形DEFGの周または内部にあるとき，

$0\leqq\frac{1}{6}-\frac{1}{3}t\leqq1$　　$\therefore\ \underline{-\frac{5}{2}\leqq t\leqq\frac{1}{2}}$ //

(4) (3)より $S=m$ となる点Pの1つは点Qであることがわかる．

よって，上の図のように平行四辺形DEFGの周または内部に点Qを通り$\overrightarrow{OC}$に平行な線分を引く．

$S=m \Longleftrightarrow$ 点Pがこの線分上にある

(3)より，$\overrightarrow{DQ}=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}t\right)\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

$\therefore\ \overrightarrow{DP}=\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}t\right)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OC}$，ただし，$0\leqq s\leqq1$

$\therefore\ \overrightarrow{DP}=\left(\frac{1}{2}-t-s,\ 6s,\ -2s\right)$

$\therefore\ \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DP}=\underline{\left(\frac{1}{2}-s,\ 6s-2,\ -2s+4\right)\ (0\leqq s\leqq1)}$ //

このとき，$m=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{OC}|\cdot|\overrightarrow{OQ}|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{41}\cdot\sqrt{10}=\underline{\frac{1}{2}\sqrt{410}}$ //