0002069450397999

愛媛大学

2015年 理学部・工学部 第4問　　1枚目／2枚

数理 石井K

4 n を自然数とし，曲線 $y = n\sin\dfrac{x}{n}$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ の第1象限における交点の座標を $(p_n,\ q_n)$ とする．

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $n\sin\dfrac{x}{n} < x$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $p_n > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ．

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，不等式

$$(*)\quad \left(n\sin\frac{1}{n}\right)x \leqq n\sin\frac{x}{n}$$

が成り立つことを利用して，次の(i)，(ii)に答えよ．

(i) 不等式 $p_n \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1 + n^2\sin^2\dfrac{1}{n}}}$ が成り立つことを示せ．

(ii) x 軸，直線 $x = p_n$，および曲線 $y = n\sin\dfrac{x}{n}$ $(0 \leqq x \leqq p_n)$ で囲まれた領域の面積を S_n とするとき，S_n を p_n を用いて表せ．また，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(4) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，(3)の不等式(*)が成り立つことを示せ．

(1) $f(x) = x - n\sin\dfrac{x}{n}$ とおくと，$f'(x) = 1 - \cos\dfrac{x}{n} \geqq 0$

$\therefore$ $f(x)$ は単調増加 より，$x > 0$ において $f(x) > f(0) = 0$

$\therefore$ $x > 0$ のとき，$n\sin\dfrac{x}{n} < x$ が成り立つ ▨

(2) $y = n\sin\dfrac{x}{n}$ を円の式に代入して，

$x^2 + n^2\sin^2\dfrac{x}{n} = 1$　　よって，$p_n^2 + n^2\sin^2\dfrac{p_n}{n} = 1$

(1)の結果より，$n\sin\dfrac{p_n}{n} < p_n$ なので，$p_n^2 + p_n^2 > 1$　$p_n > 0$ より．$\therefore\ p_n > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ▨

(3)(i) $q_n = n\sin\dfrac{p_n}{n}$ と $p_n^2 + q_n^2 = 1$ より q_n を消去して，

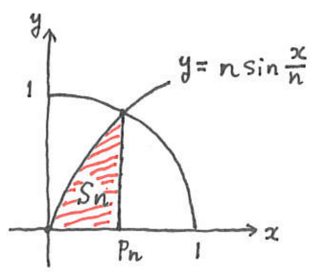
$p_n^2 + n^2\sin^2\dfrac{p_n}{n} = 1$

(*)の不等式より，$p_n^2 + \left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)^2 p_n^2 \leqq 1$

$\therefore\ p_n^2 \leqq \dfrac{1}{1 + n^2\sin^2\frac{1}{n}}$　　$p_n > 0$ より，$p_n \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1 + n^2\sin^2\frac{1}{n}}}$ ▨

(ii) $S_n = \displaystyle\int_0^{p_n} n\sin\frac{x}{n}\,dx = \left[-n^2\cos\frac{x}{n}\right]_0^{p_n} = -n^2\cos\frac{p_n}{n} + n^2$

$\therefore\ S_n = n^2\left(1 - \cos\dfrac{p_n}{n}\right)$ //



2枚目につづく

愛媛大学

2015年 理学部・工学部 第4問　　2枚目／2枚

数理 石井K

4 nを自然数とし，曲線 $y = n\sin\dfrac{x}{n}$ と円 $x^2 + y^2 = 1$ の第1象限における交点の座標を $(p_n,\ q_n)$ とする．

(1) $x > 0$ のとき，不等式 $n\sin\dfrac{x}{n} < x$ が成り立つことを示せ．

(2) 不等式 $p_n > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ が成り立つことを示せ．

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，不等式

$$(*)\quad \left(n\sin\frac{1}{n}\right)x \leqq n\sin\frac{x}{n}$$

が成り立つことを利用して，次の(ⅰ)，(ⅱ)に答えよ．

(ⅰ) 不等式 $p_n \leqq \dfrac{1}{\sqrt{1 + n^2\sin^2\dfrac{1}{n}}}$ が成り立つことを示せ．

(ⅱ) x軸，直線 $x = p_n$，および曲線 $y = n\sin\dfrac{x}{n}$ $(0 \leqq x \leqq p_n)$ で囲まれた領域の面積を S_n とするとき，S_n を p_n を用いて表せ．また，$\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ を求めよ．

(4) $0 \leqq x \leqq 1$ のとき，(3)の不等式$(*)$が成り立つことを示せ．

(3)の(ii)のつづき．

$$S_n = 2n^2\cdot\frac{1-\cos\frac{p_n}{n}}{2} = 2n^2\cdot\sin^2\frac{p_n}{2n} = \frac{p_n^2}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{p_n}{2n}}{\frac{p_n}{2n}}\right)^2$$

ここで $n\to\infty$ のとき．(2)と(3)の(i)より．

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < p_n \leqq \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)^2}}$$ となる．$\lim\limits_{\theta\to 0}\dfrac{\sin\theta}{\theta} = 1$ と はさみうちの原理より．

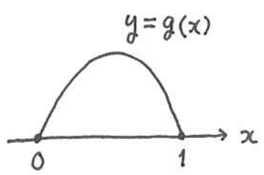
$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{p_n^2}{2}\cdot\underbrace{\left(\frac{\sin\frac{p_n}{2n}}{\frac{p_n}{2n}}\right)^2}_{\to 1} = \underline{\frac{1}{4}}$$ //

(4) $g(x) = n\sin\dfrac{x}{n} - \left(n\sin\dfrac{1}{n}\right)x$ とおくと，

$g'(x) = \cos\dfrac{x}{n} - n\sin\dfrac{1}{n}$

$g''(x) = -\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{x}{n}$



$0<x<1$で，$0 < \dfrac{x}{n} < \dfrac{1}{n} < \pi$ より $\sin\dfrac{x}{n} > 0$　$\therefore g''(x) < 0$

また $g(0) = 0$，$g(1) = 0$ なので $y = g(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ のグラフは右のようになる．

$\therefore g(x) \geqq 0$　以上より．$(*)$が成り立つ ▨