



2015年 理学部・工学部 第4問

4  $n$  を自然数とし、曲線  $y = n \sin \frac{x}{n}$  と円  $x^2 + y^2 = 1$  の第1象限における交点の座標を  $(p_n, q_n)$  とする。

- (1)  $x > 0$  のとき、不等式  $n \sin \frac{x}{n} < x$  が成り立つことを示せ。  
 (2) 不等式  $p_n > \frac{1}{\sqrt{2}}$  が成り立つことを示せ。  
 (3)  $0 \leq x \leq 1$  のとき、不等式

$$(*) \quad \left( n \sin \frac{1}{n} \right) x \leq n \sin \frac{x}{n}$$

が成り立つことを利用して、次の (i), (ii) に答えよ。

(i) 不等式  $p_n \leq \frac{1}{\sqrt{1 + n^2 \sin^2 \frac{1}{n}}}$  が成り立つことを示せ。

(ii)  $x$  軸、直線  $x = p_n$ 、および曲線  $y = n \sin \frac{x}{n}$  ( $0 \leq x \leq p_n$ ) で囲まれた領域の面積を  $S_n$  とするとき、 $S_n$  を  $p_n$  を用いて表せ。また、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ。

(4)  $0 \leq x \leq 1$  のとき、(3) の不等式 (\*) が成り立つことを示せ。