0002069720397999

# 愛媛大学

2015年 医学部 第2問

数理 石井K

2 $a$ を実数とし，数列 $\{a_n\}$ および $\{b_n\}$ を

$$a_1 = a,\quad a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (n\text{が奇数のとき}) \\ 2a_n & (n\text{が偶数のとき}) \end{cases}$$

$$b_1 = a,\quad b_{n+1} = \begin{cases} 2b_n & (n\text{が奇数のとき}) \\ b_n + 1 & (n\text{が偶数のとき}) \end{cases}$$

で定める．

(1) $a_2$，$a_3$，$a_4$，および $b_2$，$b_3$，$b_4$ を求めよ．

(2) 数列 $\{c_n\}$ を $c_n = a_{2n}$ で定める．$\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{S_n\}$，$\{T_n\}$，および $\{U_n\}$ をそれぞれ

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n} a_k,\quad T_n = \sum_{k=1}^{2n} b_k,\quad U_n = S_n - T_n$$

で定める．

(i) $\{S_n\}$ の一般項を求めよ．

(ii) $a = 1$ のとき，$\{U_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) $a_2 = a_1 + 1$ $\quad\therefore\ \underline{a_2 = a+1}$ //

$a_3 = 2a_2$ $\quad\therefore\ \underline{a_3 = 2a+2}$ //

$a_4 = a_3 + 1$ $\quad\therefore\ \underline{a_4 = 2a+3}$ //

$b_2 = 2b_1$ $\quad\therefore\ \underline{b_2 = 2a}$ //

$b_3 = b_2 + 1$ $\quad\therefore\ \underline{b_3 = 2a+1}$ //

$b_4 = 2b_3$ $\quad\therefore\ \underline{b_4 = 4a+2}$ //

(2) $a_{2n} = a_{2n-1} + 1$

$= 2a_{2n-2} + 1 \quad (n \geqq 2)$

$\therefore\ n \geqq 2$ のとき．$c_n = 2c_{n-1} + 1$

$\therefore\ c_n + 1 = 2(c_{n-1} + 1)$

$= 2^2(c_{n-2} + 1)$

$\vdots$

$= 2^{n-1}(c_1 + 1)$

ここで，$c_1 = a_2 = a+1$ より，

$\underline{c_n = (a+2)\cdot 2^{n-1} - 1}$ //

(3) (i)．$a_{2n-1} = a_{2n} - 1$ より．

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1} + a_{2k})$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(2a_{2k} - 1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(2c_k - 1)$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\{(a+2)\cdot 2^k - 3\}$$
$$= (a+2)\cdot\frac{2(1-2^n)}{1-2} - 3$$
$$= \underline{2(a+2)(2^n - 1) - 3n}\ //$$

(ii) $d_n = b_{2n}$ とおくと．

$d_n = 2b_{2n-1}$

$= 2(b_{2n-2} + 1)$

$\therefore\ d_n = 2d_{n-1} + 2$

$\therefore\ d_n + 2 = 2(d_{n-1} + 2)$

$= 2^2(d_{n-2} + 2)$

$\vdots$

$= 2^{n-1}(d_1 + 2)$

ここで，$d_1 = b_2 = 2a$ より．$d_n = 2^n(a+1) - 2$

$$\therefore\ T_n = \sum_{k=1}^{n}(b_{2k-1} + b_{2k}) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}b_{2k} + b_{2k}\right)$$

これを計算して．$T_n = 3(a+1)(2^n - 1) - 3n$

$\therefore\ U_n = 2\cdot 3(2^n - 1) - 3n - \{3\cdot 2\cdot(2^n - 1) - 3n\}$ $S_n - T_n$ に $a=1$ を代入した．

$= \underline{0}$ //