

2016年医学部第4問

1枚目/2枚

数
理
石
井

4 $f(x) = xe^{-x}$ とし、関数 $y = f(x)$ のグラフを C_1 とする。また、 C_1 を x 軸方向に $\log a$ だけ平行移動したグラフを C_2 とする。ただし、 a は $a > 1$ を満たす実数である。

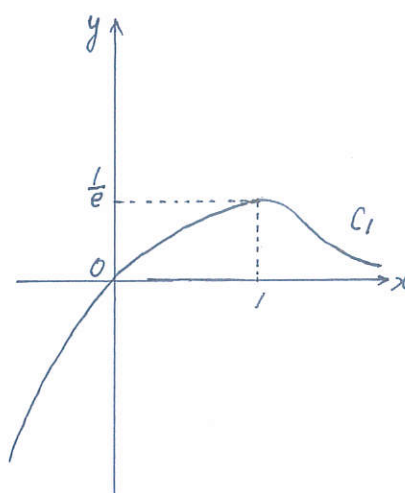
- (1) 関数 $y = f(x)$ の増減、極値を調べ C_1 の概形をかけ。なお、 $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ であることを用いてよい。
 (2) C_1 と C_2 の交点の x 座標を求めよ。
 (3) 原点を O とし、 C_2 と x 軸の交点を A とする。 C_1 、 C_2 および線分 OA で囲まれた部分の面積 S を求めよ。
 (4) (3) で求めた S に対して、 $S < \frac{a-1}{a}$ が成り立つことを示せ。

$$\begin{aligned} (1) f(x) &= e^{-x} + x \cdot (-e^{-x}) \\ &= (1-x)e^{-x} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0 \text{ より}$$

下の増減表とあわせて、グラフは右のようになる。

x	...	1	...	
$f'(x)$	+	0	-	
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘	



$$(2) xe^{-x} = (x - \log a) e^{-(x - \log a)}$$

$$\Leftrightarrow xe^{-x} = (x - \log a) e^{-x} \cdot a$$

$$\Leftrightarrow (x - ax + a \log a) e^{-x} = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-1)x = a \log a$$

$$\therefore x = \frac{a \log a}{a-1}$$

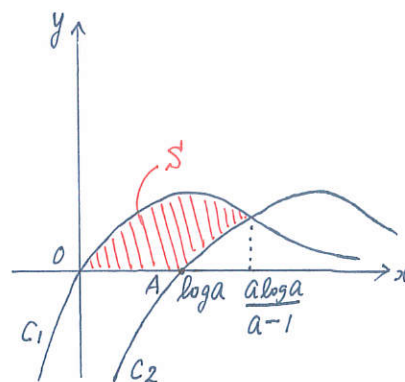
$$(3) p = \frac{a \log a}{a-1} \text{ とおくと}$$

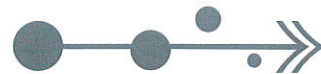
$$S = \int_0^p xe^{-x} dx - \int_{\log a}^p (x - \log a) \cdot e^{-x} \cdot a dx$$

$$= \int_0^p x(-e^{-x})' dx - a \int_{\log a}^p (x - \log a) \cdot (-e^{-x})' dx$$

$$= [-xe^{-x}]_0^p - \int_0^p e^{-x} dx - a[(x - \log a)(-e^{-x})]_{\log a}^p + a \int_{\log a}^p -e^{-x} dx$$

2枚目へ
つづく





2016年医学部第4問

2枚目/2枚

数理
石井

4 $f(x) = xe^{-x}$ とし、関数 $y = f(x)$ のグラフを C_1 とする。また、 C_1 を x 軸方向に $\log a$ だけ平行移動したグラフを C_2 とする。ただし、 a は $a > 1$ を満たす実数である。

- (1) 関数 $y = f(x)$ の増減、極値を調べ C_1 の概形をかけ。なお、 $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ であることを用いてよい。
 (2) C_1 と C_2 の交点の x 座標を求めよ。
 (3) 原点を O とし、 C_2 と x 軸の交点を A とする。 C_1 、 C_2 および線分 OA で囲まれた部分の面積 S を求めよ。
 (4) (3) で求めた S に対して、 $S < \frac{a-1}{a}$ が成り立つことを示せ。

(3) のつぎ

$$\begin{aligned} S &= -pe^{-p} - [e^{-x}]_0^p - a \{ (p - \log a) \cdot (-e^{-p}) \} + a [e^{-x}]_{\log a}^p \\ &= -pe^{-p} - e^{-p} + 1 + a(p - \log a)e^{-p} + a(e^{-p} - \frac{1}{a}) \\ &= -pe^{-p} - e^{-p} + ape^{-p} - a \log a \cdot e^{-p} + ae^{-p} \\ &= e^{-p}(-p - 1 + ap - a \log a + a) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ここで、} p = \frac{a \log a}{a-1} \text{ より、} e^{-p} = (e^{\log a})^{-\frac{a}{a-1}} = a^{-\frac{a}{a-1}}$$

$$\therefore S = a^{-\frac{a}{a-1}}(a-1) \quad \therefore S = (a-1) \cdot a^{-\frac{a}{a-1}} //$$

$$\begin{aligned} (4) S - \frac{a-1}{a} &= (a-1) \cdot \left(a^{-\frac{a}{a-1}} - \frac{1}{a} \right) \\ &= (a-1) \cdot \left(\frac{1}{a} \cdot a^{-\frac{1}{a-1}} - \frac{1}{a} \right) \\ &= \frac{a-1}{a} \cdot (a^{-\frac{1}{a-1}} - 1) \end{aligned}$$

$$\therefore \text{ここで、} a > 1 \text{ より、} a-1 > 0, a^{-\frac{1}{a-1}} - 1 < 0$$

$$\therefore S - \frac{a-1}{a} < 0 \text{ より、} S < \frac{a-1}{a} \quad \square$$