福井大学

2014年 医学部 第4問　1枚目／2枚

数理 石井K

$\boxed{4}$ 以下の問いに答えよ．

(1) nを正の整数として，以下の問いに答えよ．ただし，自然対数の底eは無理数であることを証明せずに用いてよい．

(i) 等式 $\displaystyle\int_0^1 t^n e^t\,dt = a_n e + b_n$ が成り立つ整数 a_n，b_n がただ1組存在することを示せ．

(ii) $a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1}$ の値を求めよ．

(2) 区間 $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ で連続な関数 $f(x)$ に対し，等式 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$ が成り立つことを証明せよ．さらに，それを利用して次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

(1)(i)

$$\int_0^1 t^n (e^t)'\,dt = \left[t^n e^t\right]_0^1 - \int_0^1 n t^{n-1} e^t\,dt$$
$$= e - n\int_0^1 t^{n-1} e^t\,dt$$

$\therefore\ a_n e + b_n = e - n(a_{n-1}e + b_{n-1})\quad (n \geqq 2)$

$\therefore$ eが無理数であることより．

$$\begin{cases} a_n = 1 - n a_{n-1} \\ b_n = -n b_{n-1} \end{cases} \quad (n \geqq 2)$$

いま．$\displaystyle\int_0^1 t(e^t)'\,dt = \left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t\,dt$

$$= e - \left[e^t\right]_0^1$$
$$= 1$$

$\therefore\ a_1 = 0,\ b_1 = 1$ より．

a_n, b_n は帰納的に整数であり．ただ1組存在することが分かる ■

(ii) (i)で求めた漸化式を用いて．

$$a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1} = \{1-(n+1)a_n\}b_n - a_n\{-(n+1)b_n\}$$
$$= b_n - (n+1)a_n b_n + (n+1)a_n b_n$$
$$= b_n$$
$$= -n b_{n-1}$$
$$= n(n-1)\cdot b_{n-2}$$
$$= -n(n-1)(n-2)b_{n-3}$$
$$\vdots$$
$$= \underline{(-1)^{n+1}n!}\ //$$

0001855724418999

福井大学

2014年 医学部 第4問　　2枚目／2枚　　数理 石井K

4　以下の問いに答えよ．

(1) nを正の整数として，以下の問いに答えよ．ただし，自然対数の底eは無理数であることを証明せずに用いてよい．

(i) 等式$\int_0^1 t^n e^t\,dt = a_n e + b_n$が成り立つ整数$a_n$，$b_n$がただ1組存在することを示せ．

(ii) $a_{n+1}b_n - a_n b_{n+1}$の値を求めよ．

(2) 区間$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$で連続な関数$f(x)$に対し，等式$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)dx$が成り立つことを証明せよ．さらに，それを利用して次の定積分の値を求めよ．

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x + \cos x}\,dx$$

(2) $t=\frac{\pi}{2}-x$ として置換積分する. $dt=-dx$,
$$\begin{array}{c|c} x & 0 \to \frac{\pi}{2} \\ \hline t & \frac{\pi}{2} \to 0 \end{array}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} -f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)\cdot dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)dt$$

これを用いると.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x+\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\left(\frac{3}{2}\pi-3x\right)}{\sin x+\cos x}\,dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos 3x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

$$\therefore\ 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x+\cos x}\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x-\cos 3x}{\sin x+\cos x}\,dx$$

$\left(\begin{array}{l} \sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x \\ \cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \\ \text{より. } \sin 3x - \cos 3x = 3(\sin x+\cos x) \\ \qquad -4(\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x) \end{array}\right)$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3-4(1-\sin x\cos x)\,dx$$

$$= \Big[-x-\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -\frac{\pi}{2}+1+1$$

$$= 2-\frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 3x}{\sin x+\cos x}\,dx = \underline{1-\frac{\pi}{4}}\ /\!/$$