福井大学

2015年 第4問

$\boxed{4}$ 正の整数 n について，$\sqrt{2n-1}$ 以下の最大の整数を a_n と定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) a_{100} の値を求めよ．

(2) $a_n=6$ となる n はいくつあるか求めよ．

(3) 正の整数 k に対して，$a_n=2k$ となる n はいくつあるか求めよ．

(4) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第100項までの和を求めよ．

(1) $\sqrt{2\cdot100-1}=\sqrt{199}$ で，$14=\sqrt{196}<\sqrt{199}<\sqrt{225}=15$

$\therefore \underline{a_{100}=14}$ //

(2) $a_n=6 \iff 6 \leqq \sqrt{2n-1}<7$

$\iff 36 \leqq 2n-1<49$

$\iff \frac{37}{2} \leqq n<25$

$\therefore n=19, 20, 21, 22, 23, 24$ の $\underline{6\text{個}}$ //

(3) $a_n=2k \iff 2k \leqq \sqrt{2n-1}<2k+1$

$\iff 4k^2 \leqq 2n-1<4k^2+4k+1$

$\iff 2k^2+\frac{1}{2} \leqq n<2k^2+2k+1$

$\therefore n=2k^2+1, 2k^2+2, \cdots, 2k^2+2k$ の $\underline{2k\text{個}}$ //

(4) (3)と同様にして，$a_n=2k-1$ (k：正の整数) となる n は，

$a_n=2k-1 \iff 2k-1 \leqq \sqrt{2n-1}<2k$

$\iff 2k^2-2k+1 \leqq n<2k^2+\frac{1}{2}$

$\therefore 2k^2-(2k^2-2k+1)+1=2k$ 個．

$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots$ であり，$a_{98}=13$，$a_{99}=14$，$a_{100}=14$ なので

$$\sum_{k=1}^{100} a_k = 1\cdot2+2\cdot2+3\cdot4+4\cdot4+\cdots+12\cdot12+13\cdot14+14\cdot2$$

$$=\left(\sum_{k=1}^{13} k^2\right)+(1+3+5+\cdots+13)+28$$

$$=\underline{896}$$ //