



2015年 医学部 第2問

2 a を正の定数とし、

$$x = a \cos \theta - \cos 2\theta, \quad y = a \sin \theta + \sin 2\theta \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}\right)$$

で表される曲線を C とする。曲線 C が点 $P(1, 2)$ を通るとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 定数 a の値を求めよ。
- (2) 点 P における曲線 C の接線を ℓ とする。 ℓ の方程式を求めよ。
- (3) 曲線 C と直線 $x = 1$ および x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

$$(1) 1 = a \cos \theta - (\cos^2 \theta - 1)$$

$$\therefore \cos \theta (a - 2 \cos \theta) = 0$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3} \text{ より, } \cos \theta > 0 \quad \therefore \cos \theta = \frac{a}{2} \quad \cdots ①$$

$2 = a \sin \theta + \sin 2\theta$ に代入して a を消去すると、

$$2 = 2 \sin \theta \cos \theta + \sin 2\theta$$

$$\therefore \sin 2\theta = 1 \quad \therefore \theta = \frac{\pi}{4} \quad ① \text{ より, } a = \sqrt{2}$$

$$(3) \frac{dx}{d\theta} = \sqrt{2} \sin \theta (2\sqrt{2} \cos \theta - 1) > 0 \quad (0 < \theta \leq \frac{\pi}{3})$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \sqrt{2} \cos \theta + 2 \cos 2\theta > 0 \quad (0 < \theta \leq \frac{\pi}{3})$$

$\therefore 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ において $y = 0$ となるのは、

$\theta = 0$ のときのみで、座標は $(\sqrt{2}-1, 0)$

$$\therefore S = \int_{\sqrt{2}-1}^1 y \, dx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} y \cdot \frac{dx}{d\theta} \cdot d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\sqrt{2} \sin \theta + \sin 2\theta)(-\sqrt{2} \sin \theta + 2 \sin 2\theta) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -2 \sin^2 \theta + \sqrt{2} \sin \theta \sin 2\theta + 2 \sin^2 2\theta \, d\theta$$

$$(2) \frac{dx}{d\theta} = -\sqrt{2} \sin \theta + 2 \sin 2\theta$$

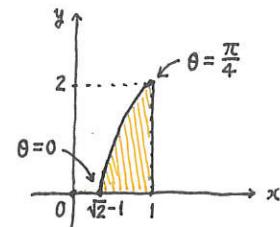
$$\frac{dy}{d\theta} = \sqrt{2} \cos \theta + 2 \cos 2\theta$$

点 P において

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot 0}{-\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 2 \cdot 1} = 1$$

$$\therefore \ell: y = 1 \cdot (x - 1) + 2$$

$$\therefore \ell: y = x + 1$$



$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} -2 \cdot \frac{1-\cos 2\theta}{2} + 2\sqrt{2} \sin^2 \theta \cos \theta + 2 \cdot \frac{1-\cos 4\theta}{2} d\theta \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta + 2\sqrt{2} \sin^2 \theta \cos \theta - \cos 4\theta \, d\theta \\
 &= \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{2\sqrt{2}}{3} \sin^3 \theta - \frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
 &= \frac{5}{6}
 \end{aligned}$$