

2011年工学部第2問

2 正の整数  $n$  に対して、 $S_n(x) = \int_0^x t^n e^{-t} dt$  とおく。ただし、 $e$  は自然対数の底とする。

(1)  $S_{n+1}(x)$  を  $n$ 、 $x$  および  $S_n(x)$  を用いて表せ。

(2)  $m$  を正の整数とする。  $x > 0$  のとき、不等式  $e^{\frac{x}{m+1}} > \frac{x}{m+1}$  が成り立つことを示せ。また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^m}{e^x} = 0$  となることを示せ。

(3) 数学的帰納法を用いて、すべての正の整数  $n$  に対して、 $\lim_{x \rightarrow \infty} S_n(x) = n!$  となることを示せ。