

2012年 第6問

 数理
石井K

 6 3次方程式 $x^3 - ax^2 - a^2x + b = 0$ が2重解ともう1つの実数解をもつとき、次の設問に答えよ。
(1) b を a で表せ。(2) この3次方程式の解を a で表せ。(1) 2重解を α 、もう1つの実数解を β とすると

解と係数の関係より

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = a & \dots \textcircled{1} \\ \alpha^2 + 2\alpha\beta = -a^2 & \dots \textcircled{2} \\ \alpha^2\beta = -b & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より. } \alpha^2 + 2\alpha(a - 2\alpha) = -a^2$$

$$\therefore 3\alpha^2 - 2a\alpha - a^2 = 0$$

$$(3\alpha + a)(\alpha - a) = 0$$

$$\therefore \alpha = -\frac{a}{3} \text{ または } \alpha = a$$

$$(i) \alpha = -\frac{a}{3} \text{ のとき } \textcircled{1} \text{ より } \beta = \frac{5}{3}a$$

$$\therefore \textcircled{3} \text{ より } b = -\frac{5}{27}a^3$$

$$(ii) \alpha = a \text{ のとき } \textcircled{1} \text{ より } \beta = -a$$

$$\textcircled{3} \text{ より } b = a^3$$

$$(i), (ii) \text{ より. } \underline{b = a^3 \text{ または } b = -\frac{5}{27}a^3} //$$

$$(2) (i) \alpha = -\frac{a}{3} \text{ のとき } \beta = \frac{5}{3}a$$

$$(ii) \alpha = a \text{ のとき } \beta = -a$$

(i), (ii) より

$$\underline{x = -\frac{a}{3} \text{ (重解), } \frac{5}{3}a \text{ または } x = a \text{ (重解), } -a} //$$