福岡教育大学

2014年 第3問

数理 石井K

$\boxed{3}$ aを定数とする．$a_n = -2n + a$で定められる数列$\{a_n\}$を次のような群に分け，第k群にはk個の項が入るようにする．

$$a_1 \mid a_2,\ a_3 \mid a_4,\ a_5,\ a_6 \mid a_7,\ a_8,\ a_9,\ a_{10} \mid \cdots$$

第1群　第2群　第3群　第4群

第k群に含まれるすべての項の和をS_kとするとき，次の問いに答えよ．

(1) S_kを求めよ．

(2) $a = 212$のとき，S_kが最大となる群に含まれる項の平均値を求めよ．

(3) $a = 92$のとき，$|S_k| = |S_{k+1}|$を満たすkを求めよ．

(1) 第1群～第$k-1$群に入っている項の数の和は $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} i = \frac{1}{2}(k-1)\cdot k$

∴ 第k群の最初の項は $a_{\frac{1}{2}k(k-1)+1} = -2\left\{\frac{1}{2}k(k-1)+1\right\} + a = -k^2 + k + a - 2$

第k群の最後の項は．$-k^2 + k + a - 2 + (k-1)\cdot(-2) = -k^2 - k + a$

∴ $S_k = \frac{k}{2}\left\{-k^2 + k + a - 2 + (-k^2 - k + a)\right\} = \underline{-k^3 + ak - k}$ //

(2) $S_{k+1} - S_k = -3k^2 - 3k + a - 2$

∴ $a = 212$のとき，$S_{k+1} - S_k = -3(k^2 + k - 70)$

はじめて $S_{k+1} - S_k < 0$ となるのは．$k > \frac{-1+\sqrt{1+280}}{2}$ ∴ k：整数より $k = 8$

このとき $S_8 = 1176$ より．平均値は $\frac{1176}{8} = \underline{147}$ //

(3) (2)より．$S_k = S_{k+1}$ となることはない

∴ $S_k = -S_{k+1}$ となるときを考える　このとき $S_k + S_{k+1} = 0$ なので

$S_k = 0$ となる k を求めると．$S_k = -k(k^2 - a + 1) = -k(k^2 - 91)$

∴ $k = \sqrt{91}$ のとき $S_k = 0$ （k：整数以外も許して考えれば）

$9 = \sqrt{81} < \sqrt{91} < \sqrt{100} = 10$ より．S_9 と S_{10} を求めると

$S_9 = -9^3 + 9\cdot 92 - 9 = 90$，$S_{10} = -90$

∴ $|S_9| = |S_{10}|$ が成り立っている　∴ $\underline{k = 9}$ //