学習院大学

2015年 理学部 第1問

$\boxed{1}$ 大小2つのサイコロと1枚のコインを同時に投げ，大小のサイコロの目をそれぞれ a, b とする．さらに，コインが表なら $c=1$ とし，コインが裏なら $c=-1$ とする．このとき，2次方程式

$$x^2+ax+bc=0$$

の2つの解を α, β とする．

(1) α と β が実数である確率を求めよ．

(2) α と β が実数であり，かつ $|\alpha|+|\beta|$ が整数である確率を求めよ．

(1) 判別式を D とすると，$D=a^2-4bc$

$\therefore$ α と β が実数 $\Longleftrightarrow$ $a^2-4bc \geqq 0$

(i) $c=1$ のとき $a^2 \geqq 4b$

$\therefore (a, b)=(2,1),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(5,*),(6,*)$ の19通り

ここで，$*$ は任意のサイコロの目

(ii) $c=-1$ のとき $a^2+4b \geqq 0$

これは常に成り立つので (a, b) は36通り

(i),(ii)より，$\dfrac{19+36}{6\times6\times2}=\underline{\dfrac{55}{72}}$ //

(2) $\alpha \leqq \beta$ とすると，$\alpha=\dfrac{-a-\sqrt{D}}{2}$，$\beta=\dfrac{-a+\sqrt{D}}{2}$

$D \geqq 0$ のときを考える．

(i) $c=1$ のとき $D=a^2-4b$

$\therefore \sqrt{D}<a$ であるから $|\alpha|+|\beta|=\dfrac{a+\sqrt{D}}{2}+\dfrac{a-\sqrt{D}}{2}=a$ (整数)

よって，(1)の(i)で求めた19通り

(ii) $c=-1$ のとき $D=a^2+4b$

$\therefore \sqrt{D}>a$ であるから，$|\alpha|+|\beta|=\dfrac{a+\sqrt{D}}{2}+\dfrac{-a+\sqrt{D}}{2}=\sqrt{D}$

$\therefore D$ は(整数)^2 で，$1+4 \leqq a^2+4b \leqq 36+24$ $\therefore 5 \leqq D \leqq 60$ $\therefore D=9, 16, 25, 36, 49$

各場合を調べると，$(a, b)=(1,2),(2,3),(3,4),(1,6),(4,5),(5,6)$ の6通り

(i),(ii)より，$\dfrac{19+6}{6\times6\times2}=\underline{\dfrac{25}{72}}$ //