0001845904518999

学習院大学

2014年 理学部 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 三角形ABCにおいて，辺BC，AC，ABの長さをそれぞれa，b，cとし，∠A，∠B，∠Cの大きさをそれぞれA，B，Cとする．このとき，3つの条件

$$(a+b+c)(a-b+c)=3ac,\quad \sin A\sin C=\frac{1+\sqrt{3}}{4},\quad A\leqq C$$

が成り立っているとする．

(1) $\cos B$を求めよ．

(2) A，B，Cを求めよ．

(1) $\{(a+c)+b\}\{(a+c)-b\}=3ac$

$\therefore\ (a+c)^2-b^2=3ac$

$\therefore\ a^2+c^2-ac-b^2=0 \quad \cdots ①$

余弦定理より．$b^2=a^2+c^2-2ac\cdot\cos B \quad \cdots ②$

①，②より．$\underline{\cos B=\frac{1}{2}}$ //

(2) (1)より $B=60°$

$\sin A\cdot\sin(120°-A)=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$

~~∴ sin A = x とおくと~~．

$\sin A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\frac{1}{2}\sin A\right)=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$

$\therefore\ \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\cos 2A}{2}=\frac{1+\sqrt{3}}{4}$

$\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A-\frac{1}{4}\cos 2A=\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\left(\sin 2A\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\cos 2A\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin(2A-30°)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-30°<2A<210°$ より $2A=90°,150°$

$A=45°,75°$

$A\leqq C$ より $A=45°$

$C=75°$

以上より

$\begin{cases} A=45° \\ B=60° \\ C=75° \end{cases}$ //