0002088631197999

岐阜大学

2015 年 第 4 問

$\boxed{4}$ 関数 $f(x) = e^{-x}$ を考える．曲線 $y = f(x)$ を C とする．$t > 0$ として，曲線 C 上の点 $(t,\ f(t))$ における接線と x 軸，y 軸との交点をそれぞれ P，Q とする．以下の問に答えよ．

(1) P，Q の座標を求めよ．

(2) 原点を O とするとき，△OPQ の面積を S とする．t が変化するとき，S の最大値を求めよ．また，そのときの 2 点 P，Q を通る直線 ℓ の方程式を求めよ．

(3) C と (2) で求めた ℓ および y 軸で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ．

(1) $f'(x) = -e^{-x}$

∴ 曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ における接線は.

$y = -e^{-t}(x-t) + e^{-t}$ すなわち $y = -e^{-t}x + (t+1)e^{-t}$

∴ $\underline{\mathrm{P}(t+1, 0),\ \mathrm{Q}(0, (t+1)e^{-t})}$ //

(2) $S = \frac{1}{2}(t+1)^2 e^{-t}$

$S' = (t+1)e^{-t} - \frac{1}{2}(t+1)^2 e^{-t}$

$= -\frac{1}{2}(t+1)(t-1)e^{-t}$

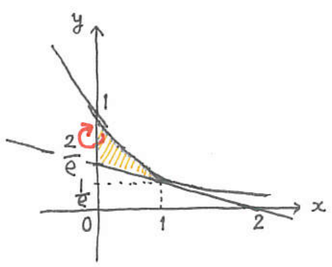
t	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$
S'		$+$	0	$-$
S		↗	$\frac{2}{e}$	↘

∴ $S' = 0$ となるのは. $t > 0$ より. $t = 1$

∴ 増減表より. $\underline{S \text{ の最大値は } \frac{2}{e}\ (t = 1 \text{ のとき})}$ //

このとき $\mathrm{P}(2, 0),\ \mathrm{Q}(0, \frac{2}{e})$ なので $\underline{\ell : y = -\frac{x}{e} + \frac{2}{e}}$ //

(3) $y = e^{-x} \Longleftrightarrow x = -\log y$



∴ $V = \pi \int_{\frac{1}{e}}^{1} (-\log y)^2\,dy - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{1}{e}$

$= \pi \int_{\frac{1}{e}}^{1} (y)'(\log y)^2\,dy - \frac{\pi}{3e}$

$= \pi \left[y(\log y)^2 \right]_{\frac{1}{e}}^{1} - 2\pi \int_{\frac{1}{e}}^{1} (y)' \log y\,dy - \frac{\pi}{3e}$

$= -\frac{\pi}{e} - 2\pi \left[y \log y \right]_{\frac{1}{e}}^{1} + 2\pi \left[y \right]_{\frac{1}{e}}^{1} - \frac{\pi}{3e}$

∴ $\underline{V = \left(2 - \frac{16}{3e}\right)\pi}$ //