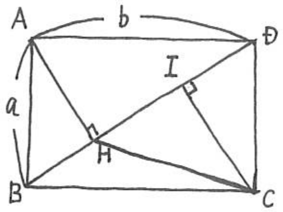
倉数芸術科学大学

2011 年 第 5 問

数理 石井K

5 長方形 ABCD において，AB = CD = a，BC = DA = b とする．頂点 A から対角線 BD に下ろした垂線を AH とする．このとき，線分 AH と CH の長さを a，b で表せ．



三平方の定理より.

$BD^2 = a^2 + b^2 \quad \therefore BD = \sqrt{a^2+b^2}$

$\triangle ABD$ の面積を S とおくと. $S = \frac{1}{2}ab$

一方, 底辺を BD, 高さを AH とみると. $S = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} \cdot AH$

よって, $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2} \cdot AH = \frac{1}{2}ab \quad \therefore \underline{AH = \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}$ //

頂点 C から対角線 BD に下ろした垂線を CI とする

CI = AH であり, BH の長さは三平方の定理より

$BH^2 = a^2 - AH^2 \quad \therefore BH^2 = \frac{a^4}{a^2+b^2} \quad \therefore BH = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}} \ (= DI)$

$$\begin{aligned} \therefore IH &= |BD - 2BH| \\ &= \left|\sqrt{a^2+b^2} - \frac{2a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right| \\ &= \frac{|b^2-a^2|}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{aligned}$$

三平方の定理より. $CH^2 = IH^2 + CI^2$

$$\begin{aligned} &= \frac{(b^2-a^2)^2}{a^2+b^2} + \frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \\ &= \frac{a^4-a^2b^2+b^4}{a^2+b^2} \end{aligned}$$

$$\therefore \underline{CH = \sqrt{\frac{a^4-a^2b^2+b^4}{a^2+b^2}}}$$ //