



2010年 第4問

4 以下の問いに答えよ。

(1) 三角関数の加法定理を用いて、次の等式を証明せよ。

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

(2) 次の不等式を証明せよ。 $|\sin \alpha - \sin \beta| \leq |\alpha - \beta|$

必要ならば、実数 θ に対して成り立つ不等式 $|\sin \theta| \leq |\theta|$ を用いてよい。

(3) 数列 $\{a_n\}$ を、次の条件によって定める。

$$a_1 = \frac{\pi}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2} \sin a_n + \frac{\pi}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、次の不等式を証明せよ。 $|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2} |a_{n+1} - a_n| \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

(4) (3) の数列 $\{a_n\}$ に対して、次の不等式を証明せよ。 $|a_{n+1} - a_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$