0001825454718999

弘前大学

2014年 理系 第1問

数理 石井K

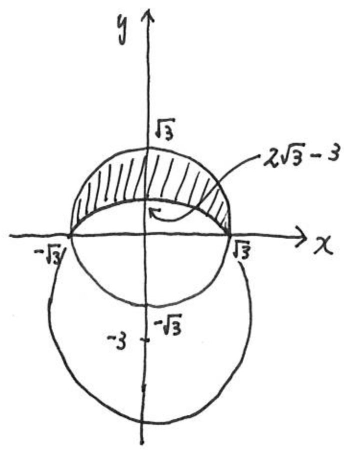
$\boxed{1}$ 次の連立不等式の表す領域を D とする．

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 3 \\ x^2+y^2+6y \leqq 3 \end{cases} \iff x^2+(y+3)^2 \geqq 12$$

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 領域 D を座標平面上に図示せよ．

(2) 領域 D を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ．



$x^2+(y+3)^2=12$

$y+3=\pm\sqrt{12-x^2}$

(1) 右図の斜線部分(境界線を含む)

(2) $V = 2\int_0^{\sqrt{3}} \pi(3-x^2)\,dx - 2\int_0^{\sqrt{3}} \pi\left(-3+\sqrt{12-x^2}\right)^2 dx$

$= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} 3-x^2\,dx - 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} 21-x^2-6\sqrt{12-x^2}\,dx$

$= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}} -18\,dx + 12\pi\int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{12-x^2}\,dx$

$x = 2\sqrt{3}\sin\theta$

$dx = 2\sqrt{3}\cdot(\cos\theta)\cdot d\theta$

$= -36\sqrt{3}\pi + 12\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} 2\sqrt{3}\cdot\cos\theta\cdot 2\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$

$= -36\sqrt{3}\pi + 144\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1+\cos 2\theta}{2}\,d\theta$

$= -36\sqrt{3}\pi + 72\pi\left[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{6}}$

$= -36\sqrt{3}\pi + 72\pi\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

$= \underline{12\pi^2 - 18\sqrt{3}\pi}$ //