



2014年理系第4問

4  $\alpha > 1$  とする. 数列  $\{a_n\}$  を

$$a_1 = \alpha, \quad a_{n+1} = \sqrt{\frac{2a_n}{a_n + 1}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める. 次の不等式が成り立つことを証明せよ.

(1)  $a_n > 1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

(2)  $\sqrt{x} - 1 \leq \frac{1}{2}(x - 1)$  (ただし,  $x \geq 0$  とする.)

(3)  $a_n - 1 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} (\alpha - 1)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )