0001032457698999

北海道大学

2013年 理系 第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 座標平面上で，直線 $y=x$ に関する対称移動を f とし，実数 c に対して，直線 $y=cx$ に関する対称移動を g とする．また，原点を中心とする 120° の回転移動を h とする．

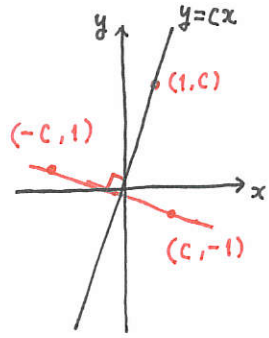
(1) f を表す行列，および h を表す行列を求めよ．

(2) g を表す行列を求めよ．

(3) 合成変換 $f\circ g$ が h になるように c の値を定めよ．

(1) f を表す行列，h を表す行列をそれぞれ F，H とすると．

$$F=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\ H=\begin{pmatrix}\cos120^\circ&-\sin120^\circ\\ \sin120^\circ&\cos120^\circ\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-\sqrt{3}\\ \sqrt{3}&-1\end{pmatrix}\ //$$



(2) g を表す行列を G とすると，

$$G\begin{pmatrix}1\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\c\end{pmatrix},\quad G\begin{pmatrix}c\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-c\\1\end{pmatrix}$$

$$\therefore G\begin{pmatrix}1&c\\c&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-c\\c&1\end{pmatrix}$$

$$\therefore G=\begin{pmatrix}1&-c\\c&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&c\\c&-1\end{pmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}1&-c\\c&1\end{pmatrix}\cdot\left(-\frac{1}{c^2+1}\right)\cdot\begin{pmatrix}-1&-c\\-c&1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{c^2+1}\begin{pmatrix}1&-c\\c&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&c\\c&-1\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{c^2+1}\begin{pmatrix}1-c^2&2c\\2c&c^2-1\end{pmatrix}\ //$$

(3) $F\cdot G=H$ より．

$$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{c^2+1}\begin{pmatrix}1-c^2&2c\\2c&c^2-1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-\sqrt{3}\\ \sqrt{3}&1\end{pmatrix}\iff\frac{1}{c^2+1}\begin{pmatrix}2c&c^2-1\\1-c^2&2c\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&-\sqrt{3}\\ \sqrt{3}&-1\end{pmatrix}$$

$$\therefore \frac{2c}{c^2+1}=-\frac{1}{2}\ \text{かつ}\ \frac{c^2-1}{c^2+1}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\iff c=-2\pm\sqrt{3}\ \text{かつ}\ c=\pm(2-\sqrt{3})$$

$$\therefore c=-2+\sqrt{3}\ //$$