0001646813538999

2014年 文系 第1問

$\boxed{1}$ 数列 $\{a_n\}$ が

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_{n+1} - a_n = a_n(5 - a_{n+1}) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots) \end{cases}$$

を満たしているとき，以下の問いに答えよ．

(1) n に関する数学的帰納法で，$a_n > 0$ であることを証明せよ．

(2) $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n を用いて表せ．

(3) a_n を求めよ．

(1) $a_{n+1}(a_n + 1) = 6a_n \quad (n = 1, 2, 3, \cdots)$ —— $(*)$

(i) $n = 1$ のとき

$a_1 = 1 > 0$ となり $a_1 > 0$ をみたす

(ii) $n = k$ のとき

$a_k > 0$ を仮定すると，

$(*)$ より，右辺 $6a_k > 0$ となり，

また，$a_k + 1 > 0$ であるから，

$a_{k+1} > 0$ となる

$\therefore$ $n = k+1$ のときも成り立つ

(i)，(ii) より，$a_n > 0$ が成り立つ ■

(2) $(*)$ の両辺を $a_n a_{n+1}\ (>0)$ で割ると，

$$1 + \frac{1}{a_n} = \frac{6}{a_{n+1}}$$

これより，

$$6b_{n+1} = b_n + 1$$

$$\therefore \underline{b_{n+1} = \frac{1}{6}b_n + \frac{1}{6}}_{//}$$

特性方程式（メモ）

$\alpha = \frac{1}{6}\alpha + \frac{1}{6}$

$\therefore 5\alpha = 1$

$\therefore \alpha = \frac{1}{5}$

(3) (2) より，

$$b_{n+1} - \frac{1}{5} = \frac{1}{6}\left(b_n - \frac{1}{5}\right)$$

$\therefore \left\{b_n - \frac{1}{5}\right\}$ は初項

$b_1 - \frac{1}{5} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$，

公比 $\frac{1}{6}$ の等比数列

$$\therefore b_n - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

$$\therefore b_n = \frac{6^{n-1} + 4}{5\cdot 6^{n-1}}$$

$$\therefore \underline{a_n = \frac{5\cdot 6^{n-1}}{6^{n-1} + 4}}_{//}$$