0001946093508999

2014年 工学部（建築） 第4問

数理 石井K

$\boxed{4}$ 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある．

$$a_1=\frac{1}{2},\quad a_2=\frac{1}{3},\quad a_{n+2}=\frac{a_na_{n+1}}{2a_n-a_{n+1}+2a_na_{n+1}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

$\frac{1}{a_n}=b_n$ とおくとき，次の問いに答えよ．

(1) b_{n+2} を b_{n+1} と b_n を用いて表せ．

(2) $c_n=b_{n+1}-b_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ．

(1) 漸化式の両辺．逆数をとると．($a_n \neq 0$ なので)

$$\frac{1}{a_{n+2}}=\frac{2}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}+2 \qquad \therefore \underline{b_{n+2}=2b_{n+1}-b_n+2}\,/\!/$$

(2) $c_{n+1}=c_n+2$ より $\{c_n\}$ は初項 $c_1=b_2-b_1=\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=1$

公差 2 の等差数列なので，$c_n=1+2\cdot(n-1)=\underline{2n-1}\,/\!/$

(3) $b_{n+1}-b_n=2n-1$ より

$$b_n=\left(\sum_{k=1}^{n-1}2k-1\right)+b_1$$

$$=\frac{1}{2}\cdot2\cdot(n-1)\ n\ -(n-1)+2$$

$$=n^2-n-n+3$$

$$=n^2-2n+3$$ これは $n=1$ のときも成り立つ

$$\therefore \underline{a_n=\frac{1}{n^2-2n+3}}\,/\!/$$