



2013年理学部第3問

3  $\theta = \frac{2\pi}{3}$  とし,  $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$  とおく. また, 2次の単位行列を  $E$  で表す. 以下の各問に答えよ.

(1)  $A^3 = E$  を示せ.

(2)  $r$  を実数とする. 自然数  $k$  に対して, 行列  $(rA)^{3k} + (rA)^{3k+1} + (rA)^{3k+2}$  の  $(1, 1)$  成分を  $a_k$  とおくと  
き,  $a_k$  を  $r$  を用いて表せ.

(3) 自然数  $N$  に対して  $x_N = 2 \sum_{k=0}^N a_k$  とする. ただし  $a_k$  は,  $k \geq 1$  のときは (2) で定めたものとし,  $k = 0$  の  
ときは  $a_0 = 1 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}r^2$  とおく.  $-1 < r < 1$  のとき,  $f(r) = \lim_{N \rightarrow \infty} x_N$  を求めよ.

(4)  $r$  が  $-1 < r < 1$  の範囲を動くとき, (3) で定めた  $f(r)$  のとりうる値の範囲を求めよ.