茨城大学

2015年第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 以下の各問に答えよ．

(1) 0でない2つの実数a，bが$a+b+1=0$を満たすとき，$\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{1}{ab}+\dfrac{a^2}{b}$の値を求めよ．

(2) xの3次方程式$x^3-(m+1)x^2-x+m+1=0$が異なる3つの実数解をもつとする．これら3つの実数解からなる数列が公差2の等差数列となるような定数mの値をすべて求めよ．

(3) 21^{2015}を400で割ったときの余りを求めよ．

(1) $$\frac{b^2}{a}+\frac{1}{ab}+\frac{a^2}{b}=\frac{a^3+b^3+1}{ab}$$

$$=\frac{(a+b)^3-3ab(a+b)+1}{ab}$$

$$=\frac{(-1)^3-3ab\cdot(-1)+1}{ab}$$ （∵ $a+b=-1$を代入した）

$$=\underline{3}$$ //

(2) 解は，$x=\alpha-2$，α，$\alpha+2$ （αは実数）とおけるので

解と係数の関係より，

$$\begin{cases}\alpha-2+\alpha+\alpha+2=m+1\\ \alpha(\alpha-2)+\alpha(\alpha+2)+(\alpha-2)(\alpha+2)=-1\\ \alpha(\alpha-2)(\alpha+2)=-m-1\end{cases}\iff\begin{cases}3\alpha=m+1 & \cdots①\\ \alpha^2=1 & \cdots②\\ \alpha^3-4\alpha=-m-1 & \cdots③\end{cases}$$

②より，$\alpha=\pm1$

$\alpha=1$のとき ①より $m=2$ これは③をみたす

$\alpha=-1$のとき ①より $m=-4$ これは③をみたす　∴ $\underline{m=2,-4}$ //

(3) 二項定理より，

$$21^{2015}=(20+1)^{2015}$$

$$={}_{2015}C_0\cdot20^{2015}+{}_{2015}C_1\cdot20^{2014}\cdot1^1+{}_{2015}C_2\cdot20^{2013}\cdot1^2$$

$$+\cdots+{}_{2015}C_{2013}\cdot20^2\cdot1^{2013}+\underline{{}_{2015}C_{2014}\cdot20^1\cdot1^{2014}}$$

$$\underline{+{}_{2015}C_{2015}\cdot1^{2015}}$$

∴ 400で割った余りは下線部を400で割った余り．

$2015\times20+1$を400で割ると余りは，$\underline{301}$ //