



2010年理学部第3問

3  $\triangle ABC$ において $\angle A$ ,  $\angle B$ ,  $\angle C$ の大きさと対辺の長さをそれぞれ $A$ ,  $B$ ,  $C$ および $a$ ,  $b$ ,  $c$ で表す. $\triangle ABC$ の面積を $S$ とし, 3頂点を通る円の半径を $R$ とする. $a \geq b \geq c$ とするとき以下の各問に答えよ.

- (1)  $\sin A \geq \sin B \geq \sin C$ を示せ.
- (2)  $S = 2R^2 \sin A \sin B \sin C$ を示せ.
- (3)  $\frac{a^2}{S}$ ,  $\frac{b^2}{S}$ ,  $\frac{c^2}{S}$ のそれぞれを $\frac{\cos A}{\sin A}$ ,  $\frac{\cos B}{\sin B}$ ,  $\frac{\cos C}{\sin C}$ を用いて表せ.
- (4)  $\frac{\cos A}{\sin A} \leq \frac{\cos B}{\sin B} \leq \frac{\cos C}{\sin C}$ を示せ.
- (5)  $A \geq B \geq C$ を示せ.
- (6)  $\frac{a^2}{S} \geq \frac{4}{\sqrt{3}}$ を示せ.
- (7)  $\triangle ABC$ が正三角形であるためには $\frac{a^2}{S} = \frac{4}{\sqrt{3}}$ であることが必要十分であることを示せ.