0001853636418999

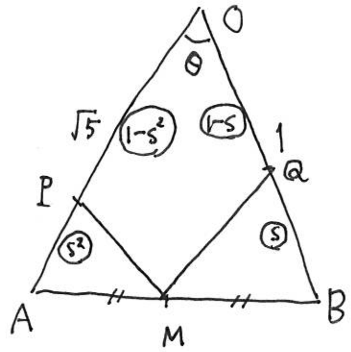
室蘭工業大学

2014年 工学部 第4問

$\boxed{4}$ 平面上に3点O，A，Bがあり，$|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{OB}|=1$，かつ $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=1$ を満たすとする．ここで，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$ は $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の内積を表す．また，s を実数とし，点P，Qを $\overrightarrow{OP}=(1-s^2)\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=(1-s)\overrightarrow{OB}$ で定める．

(1) 線分ABの中点をMとするとき，$\overrightarrow{MP}$，$\overrightarrow{MQ}$ をそれぞれ $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，および s を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{MQ}$ となる s の値をすべて求めよ．



(1) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$\therefore\ \overrightarrow{MP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OM}$

$=(1-s^2)\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$=\underline{\left(\frac{1}{2}-s^2\right)\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}}$ //

$\overrightarrow{MQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OM}$

$=(1-s)\overrightarrow{OB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$

$=\underline{-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\left(\frac{1}{2}-s\right)\overrightarrow{OB}}$ //

(2) $\overrightarrow{MP}\perp\overrightarrow{MQ} \iff \overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=0$ より．

$\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MQ}=\left\{\left(\frac{1}{2}-s^2\right)\overrightarrow{OA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right\}\cdot\left\{-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\left(\frac{1}{2}-s\right)\overrightarrow{OB}\right\}$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-s^2\right)|\overrightarrow{OA}|^2+\left\{\left(\frac{1}{2}-s^2\right)\left(\frac{1}{2}-s\right)+\frac{1}{4}\right\}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}$

$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-s\right)|\overrightarrow{OB}|^2$

$=-\frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}-s^2\right)+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}s-\frac{1}{2}s^2+s^3-\frac{1}{4}+\frac{1}{2}s$

$=+s^3+2s^2-1$

$\therefore\ s^3+2s^2-1=0$

$(s+1)(s^2+s-1)=0$

$\underline{s=-1,\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}}$ //