静岡大学

2011 年 理学部（数） 第 2 問

$\boxed{2}$ 自然数 a，b に対して，$a = bq + r$，$0 \leqq r \leqq b - 1$ を満たす整数 q，r がただ 1 組存在する．このとき q は a を b で割った商，r は a を b で割った余りという．自然数 a_0，a_1 が与えられたとき，数列 $\{a_n\}$，$\{q_n\}$ は次の性質を満たすものとする．

(i) q_n は a_{n-1} を a_n で割った商

(ii) $\begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{n-1} \\ a_n \end{pmatrix}$

ただし，$a_{N+1} = 0$ となる自然数 N が存在すれば，$n > N$ に対して q_n および a_{n+1} は定義しない．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $a_{N+1} = 0$ となる自然数 N が存在することを証明せよ．

(2) $a_N = aa_0 + ba_1$ を満たす整数 a，b が存在することを証明せよ．

(3) a_N は a_0 と a_1 の最大公約数であることを証明せよ．