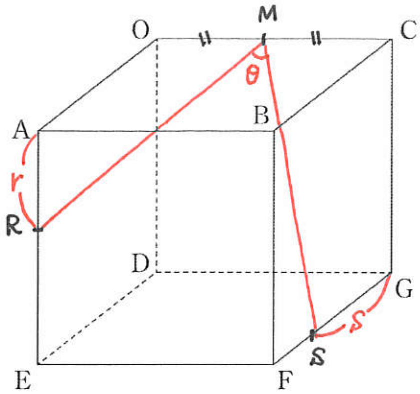
2015年 工学部 第1問

数理 石井K

$\boxed{1}$ 図のような一辺の長さが1の立方体OABC-DEFGにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$とする．Mを辺OCの中点，R，Sをそれぞれ辺AE，辺GF上の点とする．AR$=r$，GS$=s$，$\angle$RMS$=\theta$とおくとき，次の問に答えよ．



(注) (4) は (2) にならって
cos を計算したが
$\overrightarrow{RM}\cdot\overrightarrow{RS}>0$ を示せばよい
(本質的に同じ)

(1) $\overrightarrow{MR}$，$\overrightarrow{MS}$を，それぞれr，s，$\vec{a}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$を用いて表せ.

(2) $\cos\theta$をr，sを用いて表せ.

(3) $\triangle$MRSが$\angle$RMS$=90^\circ$の直角二等辺三角形のとき，rとsの値を求めよ.

(4) $\angle$MRSはつねに鋭角であることを示せ.

(1) $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\vec{c}$, $\overrightarrow{OR}=\vec{a}+r\vec{d}$, $\overrightarrow{OS}=\vec{c}+\vec{d}+s\vec{a}$ より,

$\underline{\overrightarrow{MR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OM}=\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{c}+r\vec{d}}$ //　$\underline{\overrightarrow{MS}=\overrightarrow{OS}-\overrightarrow{OM}=s\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}+\vec{d}}$ //

(2) (1) と, $|\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2=1$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot\vec{d}=0$ より

$\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{MS}=s-\frac{1}{4}+r$, $|\overrightarrow{MR}|^2=1+\frac{1}{4}+r^2$, $|\overrightarrow{MS}|^2=s^2+\frac{1}{4}+1$

$$\therefore \cos\theta=\frac{\overrightarrow{MR}\cdot\overrightarrow{MS}}{|\overrightarrow{MR}||\overrightarrow{MS}|}=\underline{\frac{r+s-\frac{1}{4}}{\sqrt{\left(r^2+\frac{5}{4}\right)\left(s^2+\frac{5}{4}\right)}}}\ //$$

(3) (2) より. $\cos\theta=0$ となるのは. $r+s=\frac{1}{4}$ …①

また, $|\overrightarrow{MR}|=|\overrightarrow{MS}|$ より. $r^2+\frac{5}{4}=s^2+\frac{5}{4}$　$\therefore (r+s)(r-s)=0$

$r, s>0$ より. $r=s$ …②　①と②より. $\underline{r=s=\frac{1}{8}}$ //

(4) (2)と同様にすると. $\overrightarrow{RS}=(s-1)\vec{a}+\vec{c}+(1-r)\vec{d}$, $\overrightarrow{RM}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}-r\vec{d}$

$$\therefore \cos\angle MRS=\frac{1-s+\frac{1}{2}-r(1-r)}{\sqrt{(s-1)^2+(r-1)^2+1}\cdot\sqrt{r^2+\frac{5}{4}}}$$

ここで, (分子) $=\left(r-\frac{1}{2}\right)^2-s+\frac{5}{4}$

$>\frac{1}{4}$ ($0<s<1$, $0<r<1$ より)

$\therefore \cos\angle MRS>0$ となり

$\angle$MRS は s, r の値によらず, 鋭角となる ▨