鹿児島大学

2014年 第4問

4 次の各問いに答えよ．

(1) θ を媒介変数として，

$$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases}$$

で表される曲線の $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ．

(2) 2つの曲線 $y = e^{-x} + 1$，$y = 3(e^{-x} - 1)$ の交点の座標を求めよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(3) (2)の2曲線と y 軸で囲まれた図形を D とする．D の面積を求めよ．

(4) (3)で与えられた D を x 軸のまわりに1回転させてできる立体の体積を求めよ．

数理 石井K

(1) $\theta = \frac{\pi}{2}$ のとき．

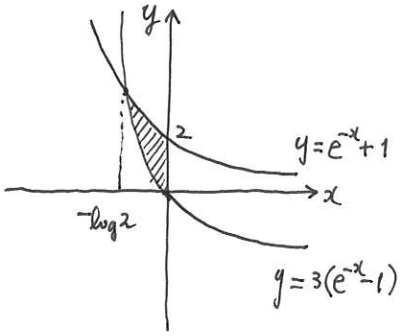
$x = \frac{\pi}{2} - 1$, $y = 1$

また，$\dfrac{dx}{d\theta} = 1 - \cos\theta$, $\dfrac{dy}{d\theta} = \sin\theta$

∴接線は，$y = \dfrac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}\left(x - \frac{\pi}{2} + 1\right) + 1$ 　∴ $\underline{y = x - \frac{\pi}{2} + 2}$ //

(2) $e^{-x} + 1 - 3(e^{-x} - 1) = 0$ 　∴ $e^{-x} = 2$ 　∴ $x = -\log 2$

このとき，$y = 3$ 　∴交点は $\underline{(-\log 2, 3)}$ //



(3) $D = \displaystyle\int_{-\log 2}^{0} e^{-x} + 1 - 3(e^{-x} - 1)\, dx$

$= \left[2e^{-x} + 4x\right]_{-\log 2}^{0}$

$= \underline{4\log 2 - 2}$ //

(4) $V = \pi\displaystyle\int_{-\log 2}^{0} (e^{-x} + 1)^2\, dx - \pi\int_{-\log 2}^{0} \left\{3(e^{-x} - 1)\right\}^2 dx$

$= \pi\displaystyle\int_{-\log 2}^{0} -8e^{-2x} + 20e^{-x} - 8\, dx$

$= \pi\left[4e^{-2x} - 20e^{-x} - 8x\right]_{-\log 2}^{0}$

$= \underline{(8 - 8\log 2)\pi}$ //