

2018年医(医)・理(数理・物理・地環)・工・歯第6問

6 関数  $f(x) = \frac{\log(x+1)}{x+1}$  について、次の各問いに答えよ。ただし、 $x \geq 0$  とする。また、 $\log(x+1)$  は  $x+1$  の自然対数を表す。

(1) 自然対数の底  $e$  に対して、 $t \geq 0$  のとき  $e^t > \frac{t^2}{2}$  が成立することを用いて

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(x+1)}{x+1} = 0$$

を示せ。

(2)  $f(x)$  の増減、極値、グラフの凹凸および変曲点を調べて、そのグラフをかけ。

(3) 自然数  $n = 1, 2, \dots$  に対して正の数  $a_n$  を、曲線  $y = f(x)$  と直線  $x = a_n$  および  $x$  軸で囲まれた部分の面積が  $n^2$  に等しくなるように定める。この  $a_n$  を求めよ。

(4) (3) で定まる数列  $\{a_n\}$  に対して、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$  を求めよ。