2015 年 理系 第 2 問　1 枚目 / 2 枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)=xe^x$ について，次の問いに答えよ．

(1) 関数 $y=f(x)$ について，増減および凹凸を調べ，そのグラフをかけ．ただし，必要ならば $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ を用いてもよい．

(2) 不定積分 $\int xe^x\,dx$，$\int x^2e^{2x}\,dx$ をそれぞれ求めよ．

(3) $0\leqq t\leqq 1$ に対し $g(x)=f(x)-f(t)$ とおく．$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，曲線 $y=g(x)$ と x 軸ではさまれる部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を $V(t)$ とする．$V(t)$ を求めよ．

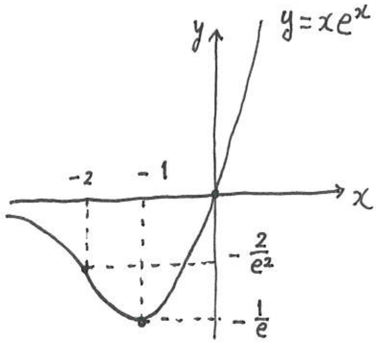
(4) (3) の $V(t)$ が最小値をとるときの t の値を a とする．最小値 $V(a)$ と，$f(a)$ の値を求めよ．ただし，a の値を求める必要はない．

(1) $f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$，$f''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$

$\therefore f'(x)=0$ となるのは $x=-1$，$f''(x)=0$ となるのは．$x=-2$

また．$\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$，$\lim_{x\to+\infty} xe^x=+\infty$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f(x)$	↘	$-\frac{2}{e^2}$	↘	$-\frac{1}{e}$	↗



(2)
$$\int xe^x\,dx=\int x(e^x)'\,dx$$
$$=xe^x-\int e^x\,dx$$
$$=\underline{(x-1)e^x+C\quad(C\text{は積分定数})}$$

$$\int x^2e^{2x}\,dx=\int x^2\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\int xe^{2x}\,dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\int x\left(\frac{1}{2}e^{2x}\right)'dx$$
$$=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\frac{1}{2}xe^{2x}+\int\frac{1}{2}e^{2x}\,dx$$
$$=\underline{\frac{2x^2-2x+1}{4}\cdot e^{2x}+C\quad(C\text{は積分定数})}$$

0001977812208999

金沢大学

2015年 理系 第2問　2枚目/2枚

数理 石井K

$\boxed{2}$ 関数 $f(x) = xe^x$ について，次の問いに答えよ．

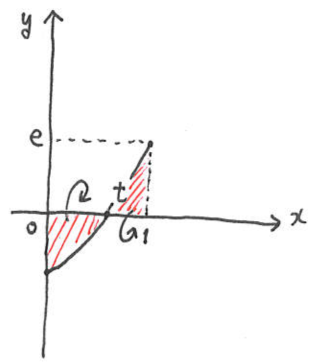
(1) 関数 $y = f(x)$ について，増減および凹凸を調べ，そのグラフをかけ．ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$ を用いてもよい．

(2) 不定積分 $\displaystyle\int xe^x\,dx$，$\displaystyle\int x^2e^{2x}\,dx$ をそれぞれ求めよ．

(3) $0 \leqq t \leqq 1$ に対し $g(x) = f(x) - f(t)$ とおく．$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，曲線 $y = g(x)$ と x 軸ではさまれる部分を，x 軸のまわりに1回転してできる回転体の体積を $V(t)$ とする．$V(t)$ を求めよ．

(4) (3)の $V(t)$ が最小値をとるときの t の値を a とする．最小値 $V(a)$ と，$f(a)$ の値を求めよ．ただし，a の値を求める必要はない．

(3)



$$V(t) = \pi\int_0^1 \{f(x) - f(t)\}^2\,dx$$

$$= \pi\int_0^1 x^2e^{2x} - 2f(t)\cdot xe^x + \{f(t)\}^2\,dx$$

$$= \pi\left[\frac{2x^2-2x+1}{4}e^{2x}\right]_0^1 - 2f(t)\left[(x-1)e^x\right]_0^1\cdot\pi + \left[x\{f(t)\}^2\right]_0^1\cdot\pi$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot(e^2-1) - 2\pi\cdot te^t + \pi\cdot t^2e^{2t}$$

$$= \underline{\pi\left\{t^2e^{2t} - 2te^t + \frac{e^2-1}{4}\right\}}$$ //

(4) $V'(t) = \pi\{2te^{2t} + 2t^2e^{2t} - 2e^t - 2te^t\} = 2\pi e^t(t+1)(te^t-1)$

$0 \leqq t \leqq 1$ で $V'(t) = 0$ となるのは，$te^t = 1$ のとき．

t	0	$\cdots$	a	$\cdots$	1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		↘		↗	

∴ $ae^a = 1$ が成り立つ．

$V(a) = \pi\left\{1^2 - 2\cdot1 + \frac{e^2-1}{4}\right\} = \underline{\frac{e^2-5}{4}\pi}$ //

$f(a) = ae^a = \underline{1}$ //