0001843456518999

高知大学

2014年 第1問

$\boxed{1}$ $0 \leqq \theta \leqq \pi$ とする．関数 $f(x) = (x - \cos\theta + \sin\theta)^2 + 2\sin^2\theta - 1$ について，次の問いに答えよ．

(1) 方程式 $f(x) = 0$ が実数解を持つような θ の範囲を求めよ．

(2) 方程式 $f(x) = 0$ が実数解を持つとき，その二つの解を α，β とする．このとき，$\alpha + \beta$ の最大値および最小値を求めよ．

(3) 関数 $y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる部分の面積が $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ となるときの θ の値を求めよ．

(1) $f(x) = \{x - (\cos\theta - \sin\theta)\}^2 + 2\sin^2\theta - 1$

$= x^2 - 2(\cos\theta - \sin\theta)x + (\cos\theta - \sin\theta)^2 + 2\sin^2\theta - 1$

$= x^2 - 2(\cos\theta - \sin\theta)x - 2\sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta$ ——(*)

$\therefore$ 判別式を D とおくと，$\dfrac{D}{4} = (\cos\theta - \sin\theta)^2 - (-2\sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta)$

$= 1 - 2\sin^2\theta$

$\therefore$ $1 - 2\sin^2\theta \geqq 0$ を解くと

$-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\theta \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ より，$\underline{0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}，\dfrac{3}{4}\pi \leqq \theta \leqq \pi}$ //

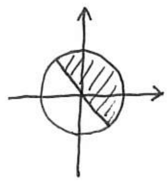
(2) (1)の(*)より．

解と係数の関係から．$\alpha + \beta = 2(\cos\theta - \sin\theta)$

$= -2(\sin\theta - \cos\theta)$

$= -2\sqrt{2}\left(\sin\theta \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} - \cos\theta \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$= -2\sqrt{2}\sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{4}\right)$



$-\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta - \dfrac{\pi}{4} \leqq \dfrac{3}{4}\pi$ より．$\begin{cases} \text{最大値}\ 2\ (\theta = 0) \\ \text{最小値}\ -2\sqrt{2}\ \left(\theta = \dfrac{3}{4}\pi\right) \end{cases}$ //

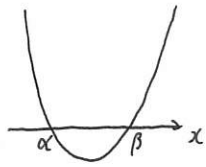
(3) $S = -\displaystyle\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)\,dx$

$= \dfrac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$

これから，$(\beta - \alpha)^3 = 2\sqrt{2}$

$\therefore (\beta - \alpha)^2 = 2$

ここで，$\begin{cases} \alpha + \beta = 2(\cos\theta - \sin\theta) \\ \alpha\beta = -2\sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta \end{cases}$



$\therefore (\beta - \alpha)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta$

$= 4(1 - 2\sin\theta\cos\theta) - 4 \cdot (-2\sin\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta)$

$= 4 - 8\sin^2\theta$

$\therefore 8\sin^2\theta = 2$

$\sin^2\theta = \dfrac{1}{4}$

$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$ ($\because 0 \leqq \theta \leqq \pi$)

$\therefore \underline{\theta = \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5}{6}\pi}$ //