川崎医療福祉大学

2012年 第3問

増田

3 台形ABCDにおいて，辺BCと辺DAが平行であり，2つの対角線ACとBDの交点をEとする．

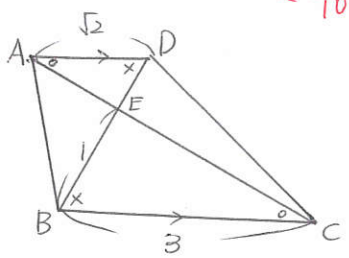
$BC=3,\quad DA=\sqrt{2},\quad BE=1,\quad \cos\angle ADB=\frac{3}{5}$

とする．

(1) $DE=\frac{24}{25}$，$AE=\frac{26}{27}$，$CE=\frac{28}{29}$ である．

(2) 三角形ABEの面積は $\frac{30}{31}$ であり，三角形CDEの面積は $\frac{32}{33}$ である．

(3) $\sin\angle AEB=\frac{34}{35}$，$\sin\angle DAC=\frac{36}{37}$ である．



AD // BC より、
∠DAE = ∠ECB
∠ADE = ∠CBE
(錯角)

(1) △ADE ∽ △CBE より、

$AD:CB=DE:BE$

$\sqrt{2}:3=DE:1$

$DE=\frac{\sqrt{2}}{3}$

△ADEにおいて 余弦定理より

$AE^2=(\sqrt{2})^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2-2\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\cos\angle ADB$

$=2+\frac{2}{9}-\frac{4}{5}=\frac{64}{45}$

$AE=\sqrt{\frac{64}{45}}=\frac{8\sqrt{5}}{15}$

また、$AD:CB=AE:CE$

$\sqrt{2}:3=\frac{4\sqrt{10}}{15}:CE$

$CE=3\times\frac{4\sqrt{10}}{15}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{10}}{5}$

(2) $(\triangle ABE\text{の面積})=\frac{1}{2}\times BE\times AD\sin\angle ADB$

$=\frac{1}{2}\times 1\times\sqrt{2}\times\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{4}{5}=\frac{2\sqrt{2}}{5}$

$(\triangle CDE\text{の面積})=\frac{1}{2}\times DE\times BC\sin\angle ADB$ ($\angle ADB=\angle DBC$)

$=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}\times 3\times\frac{4}{5}$

$=\frac{2\sqrt{2}}{5}$

(3) $(\triangle ABE\text{の面積})=\frac{1}{2}\times BE\times AE\times\sin\angle AEB$

$\frac{2\sqrt{2}}{5}=\frac{1}{2}\times 1\times\frac{8\sqrt{5}}{15}\times\sin\angle AEB$

$\therefore\ \sin\angle AEB=\frac{3\sqrt{10}}{10}$

$(\triangle ADE\text{の面積})=\frac{1}{2}\times AD\times AE\times\sin\angle DAC$

$\frac{1}{2}\times AD\times DE\times\sin\angle ADB=\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{8\sqrt{5}}{15}\times\sin\angle DAC$

$\frac{1}{2}\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{4\sqrt{10}}{15}\sin\angle DAC$

$\therefore\ \sin\angle DAC=\frac{\sqrt{10}}{10}$