

2014年 看護医療学部 第5問



5 次の設問に答えなさい。

- (1) 有理数の定義を書きなさい。
 (2) 次のそれぞれの命題の真偽を記入し、真の場合はそれを証明し、偽の場合はその理由を述べなさい。
 (i) $\sqrt{5}$ は無理数である。
 (ii) r, s がともに有理数ならば、積 rs は有理数である。
 (iii) α が無理数で、 r が0でない有理数ならば、積 αr は無理数である。
 (iv) α, β がともに無理数ならば、積 $\alpha\beta$ は無理数である。

(1) (定義) 整数 m, n を用いて、 $\frac{n}{m}$ と表すことができる実数 //

(2) (i) 真

(証明) 背理法を用いる。 $\sqrt{5}$ が有理数であると仮定すると。

ポイント → 互いに素な整数 p, q を用いて $\sqrt{5} = \frac{q}{p}$ と表せる (r : 整数)

両辺を2乗して整理すると、 $5p^2 = q^2 \dots \textcircled{1}$ (q は5の倍数より、 $q = 5r$ とおく)

$\textcircled{1}$ に代入して、 $5p^2 = 25r^2 \therefore p^2 = 5r^2 \therefore p$ は5の倍数

$\therefore p, q$ はともに5の倍数となり、互いに素であることに矛盾する

$\therefore \sqrt{5}$ は無理数である \square

(ii) 真

(証明) r, s は、整数 a, b と c, d を用いて、 $r = \frac{b}{a}, s = \frac{d}{c}$ と表せる

$\therefore rs = \frac{bd}{ac}$ であり、有理数となる \square

(iii) 真

(証明) 背理法を用いる。 αr が有理数と仮定して $\alpha r = \frac{q}{p}$ (p, q : 整数) とする。

このとき、両辺を r ($\neq 0$) で割って、 $\alpha = \frac{q}{pr}, r = \frac{v}{u}$ (u, v : 整数) とおくと $\alpha = \frac{qu}{pv}$

$\therefore \alpha$ が無理数であることに矛盾する $\therefore \alpha r$ は無理数 \square

(iv) 偽

(反例) $\alpha = \beta = \sqrt{2}$ のとき、 $\alpha\beta = 2$ となり有理数