2015年 医学部 第3問

3 以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．

p，q を正の実数として，曲線 C を $x^{\frac{1}{p}}+y^{\frac{1}{q}}=1$ $(0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1)$ により定義する．

(1) 曲線 C の方程式を y について解いて得られる関数を $y=f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ とおく．$y=f(x)$ のグラフが $0<x<1$ において変曲点をもつためには p，q が条件 $\boxed{\text{あ}}$ を満たすことが必要十分である．

(2) 曲線 C と x 軸，y 軸で囲まれた図形の面積を $S(p,\ q)$ とすると，$S(1,\ q)=\boxed{\text{い}}$ であり，$p>1$ ならば $S(p,\ q)$ と $S(p-1,\ q+1)$ の間には $S(p,\ q)=\boxed{\text{う}}\,S(p-1,\ q+1)$ の関係がある．p，q がともに自然数であるときに $S(p,\ q)$ を p，q の式で表すと $S(p,\ q)=\boxed{\text{え}}$ である．

(3) $p=q=3$ のとき，直線 $\ell : x+y=\alpha$ が曲線 C と2点を共有するための必要十分条件は $\boxed{\text{お}}<\alpha \leqq 1$ である．この条件が成り立つとき，直線 ℓ と曲線 C の交点P，Qの x 座標を x_1，x_2 とすると $x_1^{\frac{1}{3}}x_2^{\frac{1}{3}}=\boxed{\text{か}}$ かつ $\left(x_1^{\frac{1}{3}}-x_2^{\frac{1}{3}}\right)^2=\boxed{\text{き}}$ である．さらに $\alpha_0=\boxed{\text{お}}$ とおくとき $\displaystyle\lim_{\alpha \to \alpha_0+0}\frac{\mathrm{PQ}^2}{\alpha-\alpha_0}=\boxed{\text{く}}$ が成り立つ．