# 慶應義塾大学

2017年 理工学部 第3問

$\boxed{3}$ $f(x)$ を閉区間 $[0,\ 1]$ で定義された連続な増加関数とし，$n$ を正の整数とする．また，$I_n$，$J_n$ を

$$I_n = \int_0^1 f(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx$$
$$J_n = \int_0^1 f(x)|\sin((2n+1)\pi x)|\,dx$$

で定める．

(1) $x$ についての方程式 $\sin((2n+1)\pi x) = 0$ の実数解で区間 $[0,\ 1]$ に属するものは $\boxed{\text{テ}}$ 個ある．それらを小さい順に $x_0$，$x_1$，$x_2$，$\cdots$，$x_N$ ($N = \boxed{\text{テ}} - 1$) と並べると，$x_k = \boxed{\text{ト}}$ ($k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N$) である．

次に，$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \boxed{\text{テ}} - 2$ に対して，$a_k$ を

$$a_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\sin((2n+1)\pi x)\,dx$$

で定める．このとき，次の(F1)，(F2)が成り立つ．

(F1) $k$ が偶数のとき　$f(x_k)\dfrac{2}{(2n+1)\pi} \leqq a_k \leqq f(x_{k+1})\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$

(F2) $k$ が奇数のとき　$-f(x_{k-1})\dfrac{2}{(2n+1)\pi} \leqq a_k \leqq -f(x_k)\dfrac{2}{(2n+1)\pi}$

(2) (F1)が成り立つことを証明しなさい．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ が成り立つことを証明しなさい．必要であれば，(F1)，(F2)を証明なしに用いてよい．

(4) 数列 $\{J_n\}$ の極限は関数 $f(x)$ の定積分を用いて $\displaystyle\lim_{n\to\infty} J_n = \boxed{\text{ナ}}$ と表すことができる．