2014年 第2問

$\boxed{2}$ 1辺の長さが1の正六角形 ABCDEF において，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とする．線分 BC を 1：2 に内分する点を G とおき，正の実数 t に対して DE を $t:1$ に内分する点を H とおく．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積を求めよ．

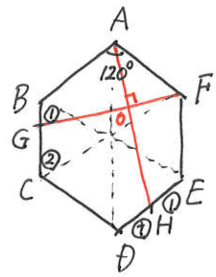
(2) $\overrightarrow{FG}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(3) $\overrightarrow{AH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ．

(4) $\overrightarrow{FG}$ と $\overrightarrow{AH}$ が垂直に交わるとき，t を求めよ．

(5) (4)において，その交点を O としたとき，$\overrightarrow{AO}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ．

(6) (5)の点 O に対して，線分 AO の長さを求めよ．



(1) $\angle BAF = 120^\circ$ より. $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}$

(2) $\overrightarrow{FG} = -\vec{b}+\vec{a}+\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{4}{3}\vec{a}-\frac{2}{3}\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{AH} = 2(\vec{a}+\vec{b}) - \frac{t}{t+1}\vec{a} = \frac{t+2}{t+1}\vec{a}+2\vec{b}$

(4) $\overrightarrow{FG}\perp\overrightarrow{AH} \iff \overrightarrow{FG}\cdot\overrightarrow{AH}=0$ より. $\frac{4}{3}\cdot\frac{t+2}{t+1}+\left(2\cdot\frac{4}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{t+2}{t+1}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-\frac{4}{3}=0$

$\therefore t=\frac{2}{3}$

(5) $\overrightarrow{AO} = k\overrightarrow{AH}$ (kは実数) と表せるので, $\overrightarrow{AO} = \frac{8}{5}k\vec{a}+2k\vec{b}$ …①

一方, $GO:OF = s:1-s$ $(0<s<1)$ とすると, $\overrightarrow{AO} = (1-s)\overrightarrow{AG}+s\overrightarrow{AF}$ より

$\overrightarrow{AG} = \vec{a}+\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}) = \frac{4}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$ $\therefore \overrightarrow{AO} = \frac{4}{3}(1-s)\vec{a}+\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}s\right)\vec{b}$ …②

①,②と. $\vec{a}$, $\vec{b}$ が一次独立であることより. $\frac{8}{5}k = \frac{4}{3}(1-s)$, $2k = \frac{1}{3}+\frac{2}{3}s$

$\therefore k = \frac{5}{14}$ $\therefore \overrightarrow{AO} = \frac{4}{7}\vec{a}+\frac{5}{7}\vec{b}$

(6) $|\overrightarrow{AO}|^2 = \frac{16}{49}+2\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{5}{7}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{25}{49}$

$= \frac{21}{49}$

$\therefore |\overrightarrow{AO}| = \frac{\sqrt{21}}{7}$