

2010年第3問

3 座標平面において、曲線 $y = e^x$ を C とし、点 $(1, 0)$ を P_1 、点 P_1 を通り x 軸に垂直な直線と C との交点を Q_1 とする。

点 Q_1 における C の接線と x 軸との交点を P_2 、点 P_2 を通り x 軸に垂直な直線と C との交点を Q_2 とする。さらに、点 Q_2 における C の接線と x 軸との交点を P_3 、点 P_3 を通り x 軸に垂直な直線と C との交点を Q_3 とする。

以下同様の操作を繰り返し、 x 軸上の点列 P_1, P_2, P_3, \dots と曲線 C 上の点列 Q_1, Q_2, Q_3, \dots を定める。また、各自然数 n について、曲線 C と 2 つの線分 $Q_n P_{n+1}, P_{n+1} Q_{n+1}$ で囲まれた図形の面積を S_n とし、数列

$$S_1, S_2, \dots, S_n, \dots$$

を定める。次の各問に答えよ。

- (1) S_1 を求めよ。
- (2) 点 P_n の座標を求めよ。
- (3) 無限級数

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n + \dots$$

の和を求めよ。