0002092367097999

高知工科大学

2015年第2問

数理 石井K

$\boxed{2}$ 関数 $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$ について，次の各問に答えよ．

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ．

(2) 関数 $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int f(x)\,dx$ を求めよ．

(4) 実数 a，b が条件 $-2 \leqq a \leqq b \leqq 2$ を満たして変化するとき，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ の最大値とそのときの a，b の値を求めよ．

(1) $f'(x)=\dfrac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\underline{-\dfrac{2(x+1)(x-1)}{(x^2+1)^2}}$ //

(2) 増減表は次のようになる．

x	$(-\infty)$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	(∞)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	(0)	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	(0)

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1+\frac{1}{x^2}}=0$$

よって．最大値 1 ($x=1$ のとき)，最小値 -1 ($x=-1$ のとき) //

(3) $\displaystyle\int f(x)\,dx=\int\frac{(x^2+1)'}{x^2+1}\,dx$

$=\underline{\log(x^2+1)+C}$ (C は積分定数) //

(4) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx=\Big[\log(x^2+1)\Big]_a^b$

$=\log(b^2+1)-\log(a^2+1)$

$=\log\dfrac{b^2+1}{a^2+1}$

$y=\log x$ のグラフは単調増加より．$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ が最大 $\iff \dfrac{b^2+1}{a^2+1}$ が最大

$\iff a^2$ が最小，b^2 が最大

$\iff a=0,\ b=2$

よって．最大値 $\log 5$ ($a=0,\ b=2$ のとき) //