0001670819238999

熊本大学

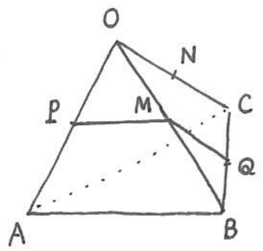
2014年 医学部（医学科） 第1問

$\boxed{1}$ 空間内の1辺の長さ1の正四面体OABCにおいて，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とし，OAの中点をPとする．以下の問いに答えよ．

(1) $0<t<1$ に対し，BCを $t:(1-t)$ に内分する点をQとする．また，PM＋MQが最小となるOB上の点をMとし，PN＋NQが最小となるOC上の点をNとする．このとき，$\overrightarrow{OM}$ と $\overrightarrow{ON}$ を，それぞれ t，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ．

(2) △QMNの面積を t を用いて表せ．

(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，△QMNの面積の最大値を求めよ．

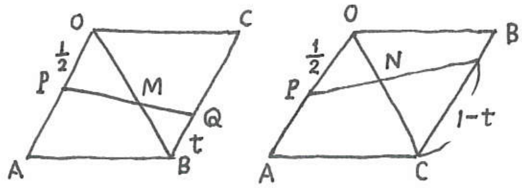


(1) 右の図と展開図より，

$\triangle OMP \backsim \triangle BMQ$，$\triangle ONP \backsim \triangle CNQ$ であるから

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+t}\overrightarrow{OB} \qquad \therefore \underline{\overrightarrow{OM}=\frac{1}{1+2t}\vec{b}}\,_{/\!/}$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+(1-t)}\overrightarrow{OC} \qquad \therefore \underline{\overrightarrow{ON}=\frac{1}{3-2t}\vec{c}}\,_{/\!/}$$



(2) 右図より，

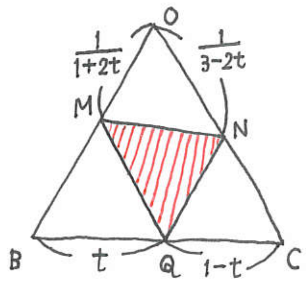
$$\triangle QMN=\triangle OBC-\triangle OMN-\triangle MBQ-\triangle NQC$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin60^\circ-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+2t}\cdot\frac{1}{3-2t}\cdot\sin60^\circ$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{1+2t}\right)\cdot t\sin60^\circ-\frac{1}{2}(1-t)\left(1-\frac{1}{3-2t}\right)\sin60^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{1-\frac{1}{(1+2t)(3-2t)}-\frac{2t^2}{1+2t}-\frac{(1-t)(2-2t)}{3-2t}\right\}$$

$$=\underline{\frac{\sqrt{3}}{4}\left\{1-\frac{3}{(1+2t)(3-2t)}\right\}}\,_{/\!/}$$



(3) $(1+2t)(3-2t)=-4t^2+4t+3$

$$=-4\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+4$$

$0<t<1$ より，$3<(1+2t)(3-2t)\leqq4$ （等号成立は $t=\frac{1}{2}$ のとき）

$\therefore$ △QMNの最大値は $\underline{\frac{\sqrt{3}}{16}\ \left(t=\frac{1}{2}\text{のとき}\right)}\,_{/\!/}$