



2014年理系第3問

3  $r$  を  $r > 1$  である実数とし、数列  $\{a_n\}$  を次で定める。

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n + r^2}{a_n + 1}$$

以下の問いに答えよ。

- (1)  $n$  が奇数のとき  $a_n < r$ 、 $n$  が偶数のとき  $a_n > r$  であることを示せ。
- (2) 任意の自然数  $n$  について、 $a_{n+2} - r$  を  $a_n$  と  $r$  を用いて表せ。
- (3) 任意の自然数  $n$  について、次の不等式を示せ。

$$\frac{a_{2n+2} - r}{a_{2n} - r} < \left( \frac{r-1}{r+1} \right)^2$$

- (4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n}$  および  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1}$  を求めよ。