# 熊本大学

2015年 文系 第3問

$\boxed{3}$ △ABCにおいて，∠Bと∠Cは鋭角とする．点Aを通り辺BCに直交する直線を引き，辺BCとの交点を$X_1$とし，線分$AX_1$の長さを1とする．また，$BX_1=1$，$CX_1=8$とする．各$n=1, 2, 3, \cdots$に対して以下の操作を行う．

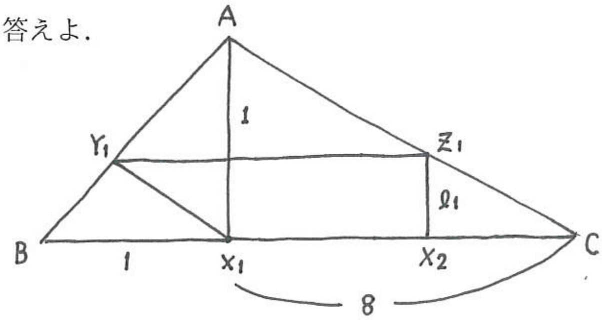
辺BC上の点$X_n$を通り辺ACに平行な直線を引き，辺ABとの交点を$Y_n$とする．また，点$Y_n$を通り辺BCに平行な直線を引き，辺ACとの交点を$Z_n$とする．点$Z_n$を通り辺BCに直交する直線を引き，辺BCとの交点を$X_{n+1}$とする．

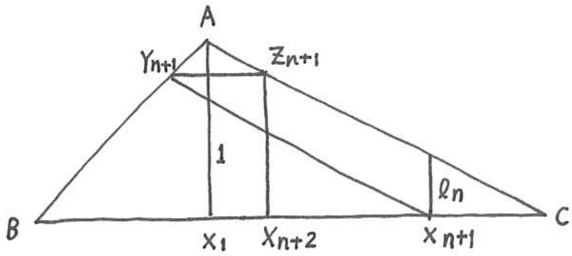
線分$Z_nX_{n+1}$の長さを$l_n$とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) $l_1$を求めよ．

(2) $l_{n+1}$を$l_n$を用いて表せ．

(3) 数列$\{l_n\}$の一般項を求めよ．




(1) $BX_1 : BC = BY_1 : BA$
$= CZ_1 : CA$
$= l_1 : 1$

$\therefore l_1 : 1 = 1 : 9 \quad \therefore \underline{l_1 = \frac{1}{9}}$ //

(2) $l_n : 1 = CX_{n+1} : CX_1$

$\therefore CX_{n+1} = 8l_n$

∴ (1)と同様にして，

$BX_{n+1} : BC = BY_{n+1} : BA$
$= CZ_{n+1} : CA$
$= l_{n+1} : 1$

ここで，$BX_{n+1} = 9 - CX_{n+1} = 9 - 8l_n$ より，

$l_{n+1} : 1 = 9 - 8l_n : 9$

$\therefore \underline{l_{n+1} = 1 - \frac{8}{9}l_n}$ //

(3) $l_{n+1} - \frac{9}{17} = -\frac{8}{9}\left(l_n - \frac{9}{17}\right)$

∴ 数列$\left\{l_n - \frac{9}{17}\right\}$は 初項 $l_1 - \frac{9}{17} = -\frac{64}{153}$，公比$-\frac{8}{9}$の等比数列

$\therefore l_n - \frac{9}{17} = -\frac{64}{153}\cdot\left(-\frac{8}{9}\right)^{n-1} \quad \therefore \underline{l_n = \frac{9}{17}\left\{1 - \left(-\frac{8}{9}\right)^{n+1}\right\}}$ //