杏林大学

2013 年 医学部 第 2 問

$\boxed{2}$ 動点 P，Q，R は，時刻 $t=0$ においてすべて点 A(3, 0) にあり，原点 O(0, 0) を中心とする半径 3 の円周上を反時計まわりに移動する．時刻 t において $\angle\mathrm{AOP}=t$，$\angle\mathrm{AOQ}=2t$，$\angle\mathrm{AOR}=3t$ である．以下，t は $0<t<\pi$ を満たすものとする．

(1) 時刻 t において，三角形 PQR の面積 S は，

$$S=\boxed{ア}\sin t-\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\sin(\boxed{エ}\,t)$$

と表わせる．面積 S は $t=\dfrac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\pi$ のとき最大値 $\dfrac{\boxed{キク}}{\boxed{ケ}}\sqrt{\boxed{コ}}$ をとる．

(2) 点 R から直線 PQ に下ろした垂線の足を H とする．時刻 t において，行列 $\begin{pmatrix}\cos\frac{3}{2}t & \sin\frac{3}{2}t\\ -\sin\frac{3}{2}t & \cos\frac{3}{2}t\end{pmatrix}$ で表わされる 1 次変換により，点 H は

$$\left(3\cos\left(\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}t\right),\ 3\sin\left(\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}t\right)\right)$$

に移動する．OH^2 は $\cos t=\dfrac{\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タ}}$ を満たす時刻 t において最大値 $\boxed{チ}+\boxed{ツ}\sqrt{\boxed{テ}}$ をとる．

(3) 時刻 t の変化にともない，線分 PR の中点が描く軌跡を C とする．点 O を極とし，半直線 $\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $(\alpha\geqq 0)$ を始線としたとき，曲線 C の極方程式は，極座標 $(r,\ \theta)$ を用いて

$$r=\boxed{ト}\cos\left(\frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}\theta\right)$$

と表わされる．