

2013年 工学科学 第3問

3  $a$  を正の定数とし、 $m$  を自然数とする。  $xy$  平面上の2曲線  $C_1: y = ax^2 (x \geq 0)$ ,  $C_2: y = (\log x)^m (x \geq 1)$  および点  $P$  は次の条件を満たしている。

$C_1$  と  $C_2$  は  $P$  を通り、 $P$  における  $C_1$  の接線と  $P$  における  $C_2$  の接線は一致する。

(1)  $a$  の値および  $P$  の  $x$  座標を  $m$  を用いて表せ。

(2) 関数  $f(x) = \frac{(\log x)^m}{x^2} (x \geq 1)$  の最大値を求め、 $x \geq 1$  において不等式  $ax^2 \geq (\log x)^m$  が成り立つことを示せ。

(3) 自然数  $n$  に対して、不定積分  $\int (\log x)^n dx$  を  $I_n$  とおく。  $n \geq 2$  のとき、部分積分法により、 $I_n$  を  $I_{n-1}$  を用いて表せ。

(4)  $m = 2$  のとき、 $C_1$ ,  $C_2$  および  $x$  軸で囲まれた部分の面積を求めよ。