

2017年 工学科学 第3問

3  $a$  を正の実数とし、 $n$  を自然数とする。  $i$  を虚数単位とし、複素数  $z_n = 1 + \frac{a}{n}i$  を考え、  $r_n = |z_n|$ 、 $\theta_n = \arg z_n$  ( $0 < \theta_n < \frac{\pi}{2}$ ) とおく。このとき次の問いに答えよ。ただし、 $0 < x < \frac{\pi}{2}$  のとき不等式

$$\sin x < x < \tan x$$

が成り立つことを証明なしに用いてよい。

- (1) 関数  $f(x) = \frac{x}{\tan x}$  の  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  の範囲における増減を調べよ。
- (2) 不等式  $n\theta_n < (n+1)\theta_{n+1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) が成り立つことを示せ。
- (3) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n\theta_n$  および  $\lim_{n \rightarrow \infty} (r_n)^n$  を求めよ。