



2012年理系第4問

4  $p$ と $q$ はともに整数であるとする。2次方程式 $x^2+px+q=0$ が実数解 $\alpha, \beta$ を持ち、条件 $(|\alpha|-1)(|\beta|-1) \neq 0$ をみたしているとする。このとき、数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = (\alpha^n - 1)(\beta^n - 1) \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定義する。以下の問いに答えよ。

(1)  $a_1, a_2, a_3$ は整数であることを示せ。

(2)  $(|\alpha|-1)(|\beta|-1) > 0$ のとき、極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ は整数であることを示せ。

(3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるとき、 $p$ と $q$ の値をすべて求めよ。ただし、 $\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。