九州大学

2012年 理系 第4問

$\boxed{4}$ pとqはともに整数であるとする．2次方程式$x^2+px+q=0$が実数解α，βを持ち，条件$(|\alpha|-1)(|\beta|-1)\neq 0$をみたしているとする．このとき，数列$\{a_n\}$を

$$a_n=(\alpha^n-1)(\beta^n-1)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定義する．以下の問いに答えよ．

(1) a_1，a_2，a_3は整数であることを示せ．

(2) $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)>0$のとき，極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$は整数であることを示せ．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$となるとき，$p$と$q$の値をすべて求めよ．ただし，$\sqrt{5}$が無理数であることは証明なしに用いてよい．