0002010369897999

九州工業大学

2015年 情報工学部 第1問

数理 石井K

1 関数 $f(x) = e^{-x}\cos\sqrt{3}x$ について以下の問いに答えよ．ただし，e は自然対数の底とする．

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ の範囲で $f(x) = 0$ をみたす x の値をすべて求めよ．

(2) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ の範囲で $f(x)$ の増減を調べよ．ただし，凹凸は調べなくてよい．

(3) 部分積分を 2 回用いて $f(x)$ の不定積分を求めよ．

(4) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ の範囲で 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = e^{-x}$ によって囲まれた部分の面積を求めよ．

(1) $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ より，$0 \leqq \sqrt{3}x \leqq 2\pi$．また，$e^{-x} > 0$ である．

$\therefore$ $\cos\sqrt{3}x = 0$ となるのは，$\sqrt{3}x = \dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3}{2}\pi$ すなわち，$\underline{x = \dfrac{\sqrt{3}\pi}{6}, \dfrac{\sqrt{3}\pi}{2}}$ //

(2) $f'(x) = -e^{-x}\cos\sqrt{3}x + e^{-x}\cdot(-\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x)$

$= -2e^{-x}\sin\left(\sqrt{3}x + \dfrac{\pi}{6}\right)$

$\therefore$ $\dfrac{\pi}{6} \leqq \sqrt{3}x + \dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{13}{6}\pi$ より，$f'(x) = 0$ となるのは，

$\sqrt{3}x + \dfrac{\pi}{6} = \pi, 2\pi$ すなわち $x = \dfrac{5}{18}\sqrt{3}\pi, \dfrac{11}{18}\sqrt{3}\pi$

$\therefore$ 増減表は右のようになる．

x	0	$\cdots$	$\frac{5}{18}\sqrt{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{11}{18}\sqrt{3}\pi$	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	1	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{5}{18}\sqrt{3}\pi}$	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{11}{18}\sqrt{3}\pi}$	↘	$e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$

(3) $I = \int f(x)\,dx$ とおくと，

$I = \int (-e^{-x})'\cos\sqrt{3}x\,dx$

$= -e^{-x}\cos\sqrt{3}x - \int(-e^{-x})'\cdot\sqrt{3}\sin\sqrt{3}x\,dx$

$= -e^{-x}\cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}e^{-x}\sin\sqrt{3}x - 3I$

$\therefore$ $4I = e^{-x}(-\cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}x)$

$\therefore$ $\underline{I = \dfrac{1}{4}e^{-x}(-\cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}x) + C}$ // （C は積分定数）

(4) $e^{-x}\cos\sqrt{3}x - e^{-x} = 0$ を $0 \leqq x \leqq \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ の範囲で解くと，

交点の x 座標は $x = 0, \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\pi$

また，$e^{-x} \geqq e^{-x}\cos\sqrt{3}x$ より，

$S = \int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi} e^{-x} - e^{-x}\cos\sqrt{3}x\,dx$

$= \left[-e^{-x} - \dfrac{1}{4}e^{-x}(-\cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}x)\right]_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}$

$= \underline{\dfrac{3}{4}\left(1 - e^{-\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi}\right)}$ //