九州工業大学

2015年 工学部 第2問

$\boxed{2}$ 初項1，公差3の等差数列 $\{a_n\}$ と，一般項が $b_n=\left[\dfrac{2n+2}{3}\right]$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ がある．ここで，実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．たとえば，$b_1=\left[\dfrac{4}{3}\right]=1$，$b_2=[2]=2$，$b_3=\left[\dfrac{8}{3}\right]=2$ である．数列 $\{a_n\}$ を次のように，b_1 個，b_2 個，b_3 個，$\cdots$ の群に分け，第 k 群には b_k 個の数が入るようにする．

| a_1 | a_2，a_3 | a_4，a_5 | a_6，$\cdots$
第1群　第2群　第3群　$\cdots$

第 k 群の最初の数を c_k とする．次に答えよ．

(1) 自然数 m に対して，b_{3m-2}，b_{3m-1}，b_{3m} をそれぞれ m の多項式で表せ．また，数列 $\{b_n\}$ の初項から第 $3m$ 項までの和 S_{3m} を求めよ．

(2) 自然数 m に対して，c_{3m-2}，c_{3m-1}，c_{3m} をそれぞれ m の多項式で表せ．また，数列 $\{c_k\}$ の初項から第 $3m$ 項までの和 T_{3m} を求めよ．

(3) 1000は第何群の何番目の数か．

(4) $x \geqq 1$ のとき $\sqrt{x^2+1} < x+\dfrac{1}{2}$ であることを用いて，次の不等式が成り立つことを示せ．ただし，m は自然数とする．

$$\sum_{k=1}^{3m}(\sqrt{c_k}-k) < \frac{m}{2}$$